09/01/23 (23º Μάθημα)

Ενοτητα 5: Martingales

Υπενθύμιση: Δεσμευμευη μεση τιμη κ' Ιδιοτητες

Αν (X,Y) τμ (συνεχης ή διακριτη) τοτε

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{για } y: f_Y(y) \neq 0$$

$$m_{X|Y}(y) = E[X|Y=y] = \begin{cases} \sum_x x f_{X|Y}(x|y) & \text{αν } X \text{ διακριτη} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx & \text{αν } X \text{ συνεχης} \end{cases}$$

$m_{X|Y}(\cdot Y) = E[X|Y]$: τυχαια μεταβ. συναρτηση της Y.

ελαχιστοποιει αυτη την $E[(X-g(Y))^2]$ δηλαδη η συναρτηση της Y που βρισκεται πιο κοντά στην X.

Ιδιοτητες:

1. Διπλή μεση τιμη: $E[X] = E[E[X|Y]]$
2. Πλήρης εξαρτηση: αν $X = g(Y) \Rightarrow$ $E[X|Y] = X$
3. Ανεξαρτησια: αν X,Y ανεξ $\Rightarrow$ $E[X|Y] = E[X]$ με πιθ 1
4. Γραμμικοτητα μεσης τιμης:
$E[a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n | Y] =$
$= a_1E[X_1|Y] + a_2E[X_2|Y] + \dots + a_nE[X_n|Y]$

5. Αν $X \geq 0 \Rightarrow E[X|Y] \geq 0$
6. Ιδιότητα Πύργου: $E[X|Z] = E[E[X|Y,Z]|Z]$
7. Παραγοντική Ιδιότητα:
$$E[g(Z)\cdot X|Z] = g(Z)E[X|Z]$$
8. Ιδιοτητα επεκτεταμενης ανεξαρτησιας:
Z ανεξ $X, Y \Rightarrow E[X|Y,Z] = E[X|Y]$

Ορισμοί: Martingales, Submartingales, Supermartingales

Εστω $Y_1, Y_2 \dots$ ακολουθια τ.μ

- Η ακολουθια $\{X_1, X_2 \dots\}$ ειναι martingale ως προς την $\{Y_n, n \geq 1\}$ αν
  i) $E[|X_n|] < \infty \quad \forall n$
  ii) $E[X_{n+1}|Y_1, Y_2, \dots Y_n] = X_n \quad \forall n$
  iii) Το X_n ειναι συναρτηση των $Y_1 \dots Y_n \quad \forall n$
- Η ακολουθια $\{X_1, X_2 \dots\}$ ειναι submartingale ως προς την $\{Y_n, n \geq 1\}$ αν
  i) $E[|X_n|] < \infty \quad \forall n$
  ii) $E[X_{n+1}|Y_1 \dots Y_n] \geq X_n \quad \forall n$
  iii) Το X_n ειναι συναρτηση των $Y_1, Y_2, \dots Y_n \quad \forall n$
- Η ακολουθια $\{X_1, X_2, \dots\}$ ειναι supermartingale ως προς την $\{Y_n, n \geq 1\}$ αν
  i) $E[|X_n|] < \infty \quad \forall n$
  ii) $E[X_{n+1}|Y_1 \dots Y_n] \leq X_n \quad \forall n$
  iii) Το X_n ειναι συναρτηση των $Y_1 \dots Y_n \quad \forall n$

Ιδιότητες martingales

Εστω $\{X_n, n \geq 1\}$ martingale ως προς $\{X_n, n \geq 1\}$
Ισχυουν τα παρακατω:

i) $E[X_1] = E[X_2] = \dots = E[X_n]$ $\forall n$

ii) Αν ϕ κυρτη με $E[|\phi(X_n)|] < \infty$ $\forall n$ τοτε $\{\phi(X_n), n \geq 1\}$ ειναι submartingale ως προς την $\{Y_n, n \geq 1\}$

iii) $E[X_{n+k} | Y_1 \dots Y_n] = X_n$

iv) Αν g συναρτηση τοτε $E[g(Y_1 \dots Y_n) \cdot X_{n+k} | Y_1 \dots Y_n] = g(Y_1 \dots Y_n) \cdot X_n$

Αποδειξη: i) Θδο $E[X_{n+1}] = E[X_n]$ $\forall n \geq 1$

$$E[X_{n+1}] = E[\underbrace{E[X_{n+1} | Y_1 \dots Y_n]}_{= X_n}] = E[X_n]$$

ii) Θελουμε νδο:

α) $E[|\phi(X_n)|] < \infty$ $\forall n$

β) $E[\phi(X_{n+1}) | Y_1 \dots Y_n] \geq \phi(X_n)$ $\forall n$

γ) $\phi(X_n)$ συναρτηση των $Y_1, Y_2 \dots Y_n$

Το α) το γνωριζουμε απο την υποθεση.

Για το β) εχουμε: Jensen

$$E[\phi(X_{n+1}) | Y_1 \dots Y_n] \geq \phi(\underbrace{E[X_{n+1} | Y_1 \dots Y_n]}_{= X_n}) = \phi(X_n) \quad \forall n$$

Για το γ) έχουμε: Επειδη $\{X_n, n \geq 1\}$ martingale ως προς $\{X_n, n \geq 1\}$, η X_n ειναι συνάρτηση των $Y_1 \dots Y_n$, αρα και η $\phi(X_n)$ συναρτηση των $Y_1 \dots Y_n$.

iii) $E[X_{n+k} | Y_1 \dots Y_n] = X_n$ ← θ.ν.δο

$$E[\underbrace{E[X_{n+2} | \underbrace{Y_1 \dots Y_n}_{Z}, \underbrace{Y_{n+1}}_{Y}]}_{X_{n+1}} | Y_1 \dots Y_n]$$

$= E[X_{n+1} | Y_1 \ldots Y_n] = X_n$ (Αποισδοτητα πύργου)

Γνωρίζω ότι ισχυει για $k = 1, 2$
Εστω ότι ισχυει για k, θδο ισχυει για $k+1$

$$E[X_{n+k+1} | Y_1 \ldots Y_n] = E[\underbrace{E[X_{n+k+1} | Y_1, \ldots, Y_n, Y_{n+1}, \ldots, Y_{n+k}]}_{X_{n+k}} | Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$$

$= E[X_{n+k} | Y_1 \ldots Y_n] = X_n$

iv) θνδο $E[g(Y_1 \ldots Y_n) X_{n+k} | Y_1 \ldots Y_n] = g(Y_1 \ldots Y_n) \cdot X_n$

Εχουμε $E[g(Y_1, \ldots, Y_n) X_{n+k} | Y_1 \ldots Y_n]$

$$= g(Y_1 \ldots Y_n) \cdot \underbrace{E[X_{n+k} | Y_1 \ldots Y_n]}_{= X_n} \quad \square$$

Θεώρημα: (Ιδιοτητες Submartingales)

Εστω $\{X_n, n \geq 1\}$ submartingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$. Τοτε:

1. $E[X_1] \leq E[X_2] \leq \ldots$
2. Αν ϕ κυρτη κ' αυξουσα και $E[|\phi(X_n)|] < \infty$ $\forall n$ τοτε $\{\phi(X_n), n \geq 1\}$ ειναι submartingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$
3. $E[X_{n+k} | Y_1 \ldots Y_n] \geq X_n$
4. Αν g μη-αρνητικη συναρτ. τοτε $E[g(Y_1, \ldots Y_n) X_{n+k} | Y_1 \ldots Y_n] \geq g(Y_1 \ldots Y_n) X_n$ $\quad \forall n \geq 1, k \geq 1$

Παράδειγμα: $\{Y_n, n \geq 1\}$ ακολ ανεξ τ.μ με $E[Y_n] = 0$ $\forall n$ και $E[|Y_n|] < \infty$ $\forall n$

Αν $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ $n = 1, 2 \ldots$ τοτε θνδο η $\{X_n, n \geq 1\}$ ειναι martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$.

Λύση : i) $E[|X_n|] = E[|\sum_{i=1}^{n} Y_i|] \leq E[\sum_{i=1}^{n} |Y_i|]$

$= \sum_{i=1}^{n} E[|Y_i|] < \infty \quad \forall n$

ii) $E[X_{n+1} | Y_1 \ldots Y_n] = E[\sum_{i=1}^{n+1} Y_i | Y_1 \ldots Y_n] =$

$= \underbrace{E[\sum_{i=1}^{n} Y_i | Y_1 \ldots Y_n]}_{\substack{\text{πλήρης εξάρτηση} \\ = \sum_{i=1}^{n} Y_i}} + \underbrace{E[Y_{n+1} | Y_1 \ldots Y_n]}_{\substack{\text{ανεξαρτησια} \\ = E[Y_{n+1}] = 0}}$

$= \sum_{i=1}^{n} Y_i = X_n$

iii) $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ ειναι συναρτηση των $Y_1 \ldots Y_n$

Παραδειγμα 2: Εστω $\{Y_n, n \geq 1\}$ ακολουθια τ.μ με $E[|Y_n|] < \infty \quad \forall n$

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - E[Y_i | Y_1, Y_2 \ldots Y_{i-1}])$$

τοτε η $\{X_n, n \geq 1\}$ ειναι martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$

Λύση: i) $E[|X_n|] = E[|\sum_{i=1}^{n} (Y_i - E[Y_i | Y_1 \ldots Y_{i-1}])|]$

$\leq E[\sum_{i=1}^{n} |Y_i - E[Y_i | Y_1 \ldots Y_{i-1}]|]$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left(E[|Y_i|] + E[|E[Y_i|Y_1 \dots Y_{i-1}]|]\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} E[|Y_i|] + \sum_{i=1}^{n} E\underbrace{[E[|Y_i| \,|\, Y_1, Y_2, \dots Y_{i-1}]]}_{E[|Y_i|]}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} E[|Y_i|] < \infty$$

ii) $E[X_{n+1}|Y_1 \dots Y_n] = E[\sum_{i=1}^{n+1}[Y_i - E[Y_i|Y_1 \dots Y_{i-1}] \,|\, Y_1 Y_2 \dots Y_n]$

όλο το αθρ. συναρ των $Y_1 \dots Y_n$ $= E[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \underbrace{E[Y_i|Y_1 \dots Y_{i-1}]}_{\text{συναρτ. των } Y_1 \dots Y_{i-1}}) \,|\, Y_1 \dots Y_n]$

συναρτ. των $Y_1 \dots Y_{i-1}, Y_i$

$+ E[Y_{n+1} - E[Y_{n+1}|Y_1 \dots Y_n] \,|\, Y_1, \dots Y_n]$

Ιδιοτ. πληρους εξαρτ. $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - E[Y_i|Y_1 \dots Y_{i-1}])$

$+ E[Y_{n+1}|Y_1 \dots Y_n] - E[\underbrace{E[Y_{n+1}|Y_1 \dots Y_n]}_{\text{συναρτηση των } Y_1 \dots Y_n}|Y_1 \dots Y_n]$

ιδιοτ. πληρους εξαρ $X_n + \cancel{E[Y_{n+1}|Y_1 \dots Y_n]} - \cancel{E[Y_{n+1}|Y_1 \dots Y_n]}$

$= X_n$

iii) $X_n = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - E[Y_i|Y_1 \dots Y_{i-1}])$

συναρτηση των $Y_1, Y_2, \dots Y_n$

Παραδειγμα 3: (Doob's Martingale)

Αν X τμ με $E[|X|] < \infty$ και $Y_1, Y_2 \dots$ ακολ τμ τοτε νδο η $\{X_n, n \ge 1\}$ με $X_n = E[X|Y_1, Y_2 \dots Y_n]$ ειναι martingale ως προς $\{Y_n, n \ge 1\}$

Παράδειγμα 4:

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με $S = \mathbb{N}$ και πιθ μετάβασης $p_{ij} = \frac{e^{-1}}{(j-i)!}$ για $i = 0,1..$ $j = i, i+1 ..$

και $E[X_0] < \infty$ Νδο η $\{Y_n, n\geq 1\}$ με $Y_n = X_n - n$, $n = 1,2..$ είναι martingale ως προς $\{X_n, n\geq 0\}$.

Λύση: (ii) $E[Y_{n+1} | X_0, X_1, \dots X_n]$:

$$= E[X_{n+1} - (n+1) | X_0, X_1 .. X_n]$$
$$= E[X_{n+1} | X_0, X_1, .. X_n] - (n+1)$$
$$\underset{\text{ιδιοτ}}{\overset{\text{Markov}}{=}} E[X_{n+1} | X_n] - (n+1)$$

Θα υπολογ την $E[X_{n+1} | X_n = i]$

$$= \sum_{j=1} j p_{ij} = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{j e^{-1}}{(j-i)!} = \frac{1}{e} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{j}{(j-i)!}$$

$$\overset{k=j-i}{=} \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+i}{k!} = \frac{1}{e}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i}{k!} \right)$$

$$= \frac{1}{e}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}}_{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}}_{e^1} \right) = \frac{1}{e}(e + ie) = 1 + i$$

Οπότε, $E[X_{n+1} | X_n] = 1 + X_n$

Άρα $E[Y_{n+1} | X_0, .. X_n] = E[X_{n+1} | X_n] - (n+1)$
$$= 1 + X_n - n - 1$$
$$= X_n - n = Y_n$$

(i) $E[|Y_n|] = E[|X_n - n|] \leq E[|X_n|] + n$

$\overset{X_n \geq 0}{=} E[X_n] + n$

Όμως, $E[X_n] = E[\underbrace{E[X_n | X_{n-1}]}_{1+X_{n-1}}] = E[1 + X_{n-1}]$

$\Rightarrow E[X_n] = 1 + E[X_{n-1}] = \ldots = n + E[X_0]$

Άρα, $E[|Y_n|] \leq E[X_0] + n + n = \underbrace{E[X_0]}_{<\infty} + 2n$

(iii) Η $Y_n = X_n - n$ είναι συνάρτηση του X_n

11/01/23 (24º Μάθημα - Τελευταίο)

Ορισμός: (Χρονος Markov, Χρόνος Τερματισμού)

Εστω $\{Y_n, n\geq 0\}$ ακολουθία τ.μ. Η οποια λεγεται χρονος Markov για την $\{Y_n, n\geq 0\}$ αν το ενδεχομενο $\{\tau = n\}$ καθοριζεται απο τις τυχαιες μεταβλητες $Y_0, Y_1, \ldots Y_n$

Δηλαδη τ χρονος Markov για την $\{Y_n, n\geq 1\}$ $\Leftrightarrow$ $I\{\tau=n\}$ ειναι συναρτηση των $Y_1 \ldots Y_n$

Αν, επιπλεον, $P(\tau<\infty)=1$, ο τ λεγεται χρονος στασης, τερματισμού, διακοπης (stopping time)

Παραδειγμα: Εστω $\{Y_n, n\geq 1\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S και $A\subseteq S$. ο $\tau=\inf\{n\geq 1: Y_n\in A\}$ Ειναι χρονος Markov ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$ αφού $\{\tau=n\} = \{Y_1 \ldots Y_{n-1}\notin A, Y_n\in A\}$

Ιδιοτητες χρονων Markov

Εστω $\{Y_n, n\geq 0\}$ ακολουθια τ.μ. Ισχυουν τα παρακατω:

1) τ χρονος Markov για την $\{Y_n, n\geq 0\}$ $\Leftrightarrow$
$\{\tau\leq n\}$ καθοριζεται απο τις $Y_0 \ldots Y_n$ $\Leftrightarrow$
$\{\tau > n\}$ » » »

[Αν τ χρονος Markov για την $\{Y_n, n\geq 0\}$ $\Leftrightarrow$ $I\{\tau=n\}$ συναρτ. των $Y_0 \ldots Y_n$]

$$\{T \le n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{T=i\} \Leftrightarrow I\{T\le n\} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \underbrace{I\{T=i\}}_{\text{συναρτηση } Y_0 \dots Y_i}}_{\text{συναρτ. των } Y_0 \dots Y_n}$$

$$\{T=n\} = \{T\le n\} \setminus \{T \le n-1\} \Leftrightarrow$$

$$I\{T=n\} = \underbrace{I\{T\le n\}}_{\text{συναρτ. } Y_0 \dots Y_n} - \underbrace{I\{T\le n-1\}}_{\text{συναρτ. } Y_0 \dots Y_{n-1}}$$

2) T χρονος Markov ως προς $\{Y_n, n\ge 0\} \Leftrightarrow$
$\{T<n\} = \{T\le n-1\}$ καθοριζεται απο τις $Y_0 \dots Y_{n-1}$

$\{T\ge n\}$ καθοριζεται απο τις $Y_0 \dots Y_{n-1}$

3) T, S χρονοι Markov ως προς $\{Y_n, n\ge 0\}$

- $S+T$ χρονος Markov ως προς $\{Y_n, n\ge 0\}$
- $\min\{S,T\} = S\wedge T$ » » »
- $\max\{S,T\} = S\vee T$ » »

$$I\{S+T=n\} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{I\{S=k\}}_{\text{συναρτ. } Y_0, Y_1 \dots Y_k} \underbrace{I\{T=n-k\}}_{\text{συναρτ. } Y_0, \dots Y_{n-k}}}_{Y_0, \dots Y_n}$$

$$\{\min\{S,T\}>n\} = \{S>n\} \cap \{T>n\}$$

$$I\{\min\{S,T\}>n\} = \underbrace{I\{S>n\}}_{\text{συν. } Y_0 \dots Y_n} \cdot \underbrace{I\{T>n\}}_{\text{συν. } Y_0 \dots Y_n}$$

$$I\{\max\{S,T\}\le n\} = \underbrace{I\{S\le n\}}_{\text{συναρ } Y_0 \dots Y_n} \underbrace{I\{T\le n\}}_{\text{συναρτ. } Y_0 \dots Y_n}$$

Ερώτημα: Έστω $\{X_n, n\ge 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\ge 0\}$ τότε $E[X_n] = E[Y_n]$ $\forall n$

Αν T Markov time ως προς $\{Y_n, n\ge 0\}$, τότε $E[X_T] = E[X_0]$. Όχι πάντα.

Λήμμα:
Έστω $\{X_n, n\ge 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\ge 0\}$ και T χρόνος Markov ως προς $\{Y_n, n\ge 0\}$
Αν $\{X_{T\wedge n}, n\ge 0\}$ με

$$X_{T\wedge n} = \begin{cases} X_n, & n\le T \\ X_T, & n>T \end{cases}$$

που την ονομάζουμε σταματημένη διαδικασία τότε $\{X_{T\wedge n}, n\ge 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\ge 0\}$.

Απόδειξη: $X_{T\wedge n} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k I\{T=k\} + X_n I\{T\ge n\}$

i) $E[|X_{T\wedge n}|] = E[|\sum_{k=0}^{n-1} X_k I\{T=k\} + X_n I\{T\ge n\}|]$

$\le \sum_{k=0}^{n-1} E[|X_k| I\{T=k\}] + E[|X_n| I\{T\ge n\}]$

ii) Θ.ν.δ.ο

$E[X_{T\wedge(n+1)} | Y_0 \dots Y_n] = X_{T\wedge n}$

$$E[X_{\tau\wedge(n+1)} \mid Y_0 \ldots Y_n] =$$

$$= E\Big[\underbrace{\sum_{k=0}^{n} X_k \underbrace{I\{\tau=k\}}_{\text{συν. των } Y_0 .. Y_k}}_{\text{συναρτ. των } Y_0 .. Y_n} + X_{n+1} \underbrace{I\{\tau \geq n+1\}}_{\text{συναρ των } Y_0 .. Y_n} \,\Big|\, Y_0 \ldots Y_n\Big]$$

martingale

$$\sum_{k=0}^{n} X_k I\{\tau=k\} + I\{\tau \geq n+1\} \underbrace{E[X_{n+1} \mid Y_0 .. Y_n]}_{= X_n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} X_k I\{\tau=k\} + X_n I\{\tau \geq n\} = X_{\tau\wedge n}$$

Σπαιρνω τον τελευταιο ορο και τον ενσωματ.

iii) $X_{\tau\wedge n} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k I\{\tau=k\} + X_n I\{\tau \geq n\}$

συναρτηση των $Y_0 \ldots Y_n$

Τελικά, η $\{X_{\tau\wedge n}, n \geq 0\}$ είναι martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 0\}$

Συμπερασμα: Αν $\{X_n, n \geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 0\}$ και τ χρονος Markov ως προς $\{Y_n, n \geq 0\}$ τοτε $E[X_n] = E[X_0] = E[X_{\tau\wedge n}]$

Αν γνωριζουμε οτι $P(\tau < \infty) = 1$, τοτε

$$\lim_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n} = X_\tau \text{ με πιθ } 1$$

Εμείς, όμως θα θέλαμε $E[X_T] = E[X_0]$
ενώ γνωρίζουμε ότι $E[X_0] = E[X_{T\wedge n}]\ \forall n$
$= \lim_{n\to\infty} E[X_{T\wedge n}]$ και $E[X_T] = E[\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}]$

Θα ισχύει ότι $E[X_T] = E[X_0]$ αν μπορούσαμε να περάσουμε το όριο μέσα στη μέση τιμή.

Θεώρημα: Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$ και T χρόνος Markov ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$. Αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

i) $\exists$ σταθερά c : $P(T\leq c) = 1$
ii) Αν $P(T<\infty)$ και $\exists$ σταθερά M:
$$|X_n|\leq M \quad \forall n\geq 0$$
iii) $E[T]<\infty$ και $\exists$ σταθεροί M:
$$E[|X_{n+1}-X_n|\, Y_0 \dots Y_n] \leq M$$
iv) $P(T<\infty)=1$ και $E[\sup |X_{T\wedge n}|] < \infty$

v) $P(T<\infty)=1$, $E[|X_T|]<\infty$ και
$$\lim_{n\to\infty} E[X_n I\{T>n\}] = 0$$
τότε $E[X_T] = E[X_0]$

Εφαρμογή 1: Ισότητα Wald
Έστω $\{Y_n, n\geq 1\}$ ακολουθία ανεξ. κ' ισόνομ. τμ με $E[Y_n] = \mu$, $Var[Y_n] = \sigma^2 < \infty$ και T χρόνος Markov ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$ με

$P(\tau<\infty)=1$, $E[\tau]<\infty$. Τοτε

$$E\left[\sum_{i=1}^{\tau} Y_i\right]=E[\tau]\cdot\mu$$

Αποδειξη: $\{X_n, n\geq 1\}$ $E[X_\tau]=E[X_1]$

Εστω $X_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i-n\mu$. Τοτε $\{X_n, n\geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$. (Παραδειγμα 2: προηγ. Μαθημ)

Αν ισχυει καποια απο τις συνθηκες του προηγ. θεωρημ., θα παρουμε

$$E[X_\tau]=E[X_1] \Leftrightarrow$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{\tau} Y_i-\tau\cdot\mu\right]=E[Y_1-\mu] \Leftrightarrow$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{\tau} Y_i\right]-\mu E[\tau]=0 \Leftrightarrow$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{\tau} Y_i\right]=E[\tau]\cdot\mu$$

Αρκει λοιπον νδο καποια απο τις συνθηκες ισχυει.

Θδο ισχυει η (iii)

$E[\tau]<\infty$ (απο υποθεση)

$$E[|X_{n+1}-X_n| \mid Y_0\ldots Y_n]=$$

$$=E\left[\left|\sum_{i=1}^{n+1} Y_i-(n+1)\mu-\sum_{i=1}^{n} Y_i+n\mu\right| \mid Y_0,\ldots Y_n\right]$$

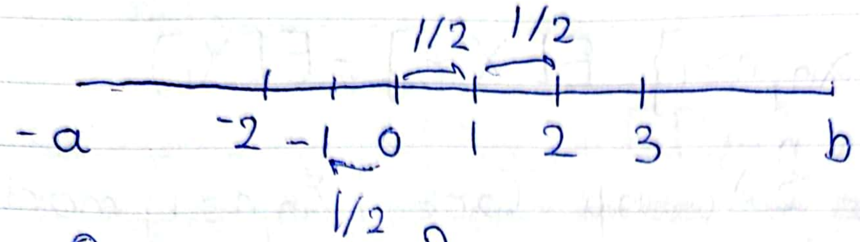
$$=E[|Y_{n+1}-\mu| \mid Y_0\ldots Y_n]$$

$$=E[|Y_{n+1}-\mu|] \overset{C.S}{\leq} \sqrt{E[(Y_{n+1}-\mu)^2]}=\sqrt{Var(Y_{n+1})}=\sqrt{\sigma^2}$$

$$=\sigma$$

Εφαρμογη 2

Απλος τυχαιος περιπατος



Θεωρουμε απλο τυχαιο περιπατο που ξεκινα απο την καταστασn 0 και εχει φραγματα $-a$ και b.

T: χρονος μεχρι απορροφηση
Θνδο i) $E[T] < \infty$

ii) $P(\text{απορ. στο } b) = \dfrac{a}{a+b}$

Λύση:
i) Έστω $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{με πιθ } 1/2 \\ -1, & \text{με πιθ } 1/2 \end{cases}$ $i = 1, 2 \ldots$

$E[Y_i] = 0$ και $\{Y_n, n \geq 1\}$ ακολουθια ανεξ τμ

Αν $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ τοτε

$\{X_n, n \geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$
(παραδειγμα 1, προηγ μαθημα)

T Markov time ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$

Επίσης, $S_n = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 - n = X_n^2 - n$

$\{S_n, n \geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$

Πράγματι: i) $E[|S_n|] = E[|(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 - n|]$

$\overset{\text{Τριγ. Ανισ.}}{\leq} E[(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2] + n < \infty \quad \forall n$

ii) $E[S_{n+1} | Y_1 \dots Y_n] \overset{\text{θνδο}}{=} E[S_n]$

$E[(\sum_{i=1}^{n+1} Y_i)^2 - n - 1 | Y_1 \dots Y_n]$

$= E[(\sum_{i=1}^{n} Y_i + Y_{n+1})^2 | Y_1 \dots Y_n] - n - 1$

$= E[(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} Y_i) Y_{n+1} + (Y_{n+1})^2 | Y_1 \dots Y_n] - n - 1$

$= (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} Y_i \underbrace{E[Y_{n+1}]}_{= 0} + \underset{=}{E}[(Y_{n+1})^2]$

$(-1)^2 \frac{1}{2} + 1^2 \frac{1}{2} = 1$

$= (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 + 1 - n - 1 = S_n$

iii) $S_n = (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 - n$ συναρτ. των $Y_1 \dots Y_n$

Αρα $\{S_n, n \geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$ τ Markov time $\Rightarrow$

Αρα η $\{S_{n \wedge \tau}, n \geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$ $\Rightarrow$

$E[S_{n \wedge \tau}] = E[S_1] = E[Y_1^2 - 1] = 0$

$\Rightarrow E[X_{n \wedge \tau}^2 - n \wedge \tau] = 0$

$\Rightarrow E[X_{n \wedge \tau}^2] = E[\tau \wedge n] \quad \forall n \geq 1$

Όμως, $\lim_{n\to\infty} E[T\wedge n] = E[T]$

και $E[X^2_{n\wedge T}] < \infty$

αφού $|X_{n\wedge T}| \leq \max\{|a|,|b|\}$

Άρα, $E[T]<\infty \Rightarrow P(T<\infty)=1$

ii) $\{X_n, n\geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$P(T<\infty)=1$

και $E[\sup_n |X_{T\wedge n}|] < \infty$ αφού

$|X_{T\wedge n}| \leq \max\{|a|,|b|\}$

Άρα ισχύει η συνθήκη (iv) του θεωρημ.

οπότε $E[X_T] = E[X_1] = 0 \Rightarrow$

$-a P(X_T=-a) + b P(X_T=b) = 0 \Rightarrow$

$-a(1-P(X_T=b)) + bP(X_T=b) = 0$

$-a + aP(X_T=b) + bP(X_T=b) = 0 \Rightarrow$

$$P(X_T=b) = \frac{a}{a+b}$$