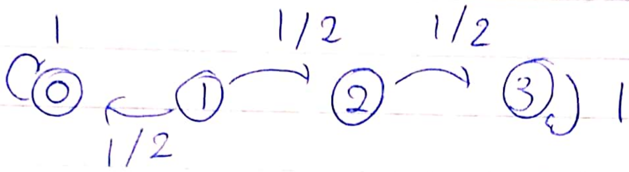
21/11/22 (14º Μαθημα)

Παραδειγμα (Συνεχεια)



β) $m_1(\{0,3\}) = ?$

Θα γραφω το συστημα για τις $m_i(\{0,3\})$ κανοντας αναλυση πρωτου βηματος.

$$m_0(\{0,3\}) = 0$$
$$m_3(\{0,3\}) = 0$$

$$m_1(\{0,3\}) = 1 + P_{12} m_2(\{0,3\}) + P_{10} m_0(\{0,3\})$$

$$m_2(\{0,3\}) = 1 + P_{23} \overset{0}{\cancel{m_3(\{0,3\})}} + P_{21} m_1(\{0,3\})$$

$$\Rightarrow m_2(\{0,3\}) = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} m_2(\{0,3\})\right)$$

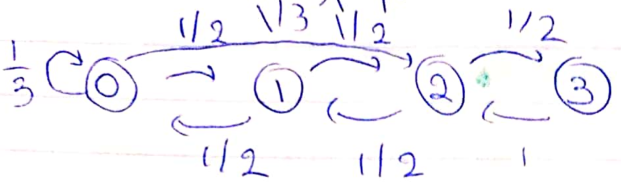
$$\Rightarrow \frac{3}{4} m_2(\{0,3\}) = \frac{3}{2}$$

$$m_2(\{0,3\}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$$

$$m_1(\{0,3\}) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

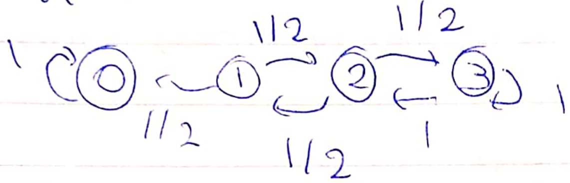
Σημειωση:

Εστω οτι ειχαμε

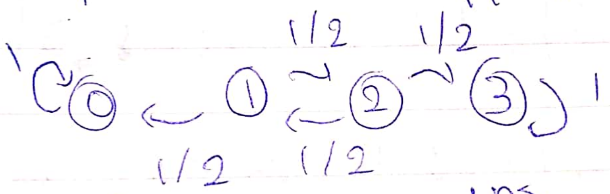


▷ Αν ζητουσαμε $m_1(\{0,3\})$ (οπως β ερωτημα) το συστημα θα ηταν ακριβως ιδιο με την προηγουμενη ασκηση.

Άρα, μπορω πριν γραψω το συστημα να κάνω απορροφητικες τις καταστασεις 0 και 3.



▷ Αν ζητούσαμε $h_1(\{3\})$ θα επρεπε να καυω μονο την 3 απορροφητικη.



Θεώρημα: (Πιθανοτητες $1^{ης}$ εισοδου / απορροφησης)

Το $[h_i(C)]_{i\in C}$ ειναι η ελαχιστη μη-αρνητικη λυση του συστηματος

$$x_i = 1 \quad , i \in C$$

$$x_i = \sum_{k\in S} p_{ik} \cdot x_k \quad , i \in S \setminus C$$

Θεώρημα (μεσοι χρονοι $1^{ης}$ εισοδου / απορρόφησης)

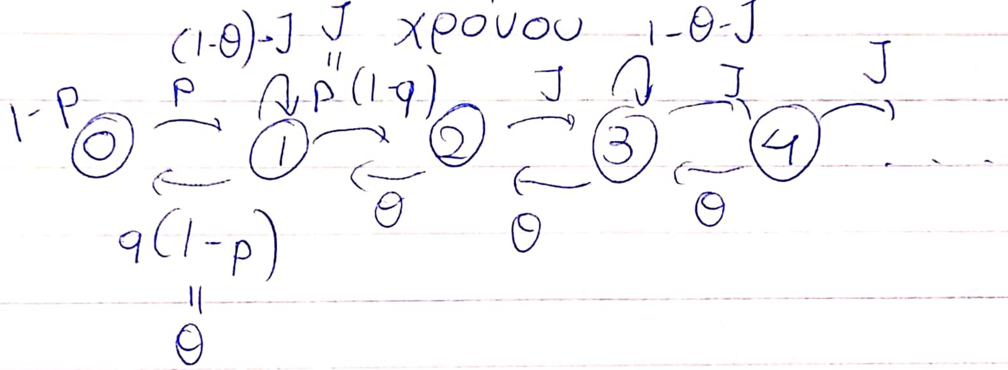
Το $[m_i(C)]_{i\in S}$ ειναι η ελαχιστη μη-αρνητικη λύση του συστήματος

$$y_i = 0 \quad , i \in C'$$

$$y_i = 1 + \sum_{k \in S'} p_{ik} y_k \quad , i \in S \setminus C'$$

ή $k \in S \setminus C'$

Παράδειγμα: (Σύστημα εξυπηρέτησης διακριτού χρόνου)



$h_i \equiv h_i(\{0\}) = ;$

Λύση: $h_0 = 1$

$$h_i = \theta h_{i-1} + J h_{i+1} + (1-\theta-J) h_i \quad , i \geq 1$$

$$(\theta + J) h_i = \theta h_{i-1} + J h_{i+1} \quad , i \geq 1$$

$$J(h_i - h_{i+1}) = \theta(h_{i-1} - h_i) \quad , i \geq 1$$

$$h_i - h_{i+1} = \frac{\theta}{J}(h_{i-1} - h_i) \quad , i \geq 1$$

Θέτω $u_i = h_{i-1} - h_i \quad , i \geq 1$

$$u_{i+1} = \frac{\theta}{J} u_i \quad , i \geq 1$$

$$u_i = \frac{\theta}{J} u_{i-1} = \frac{\theta}{J} \cdot \frac{\theta}{J} u_{i-2} = \ldots = \left(\frac{\theta}{J}\right)^{i-1} u_1 \quad , i \geq 1$$

$$h_{i-1} - h_i = \left(\frac{\theta}{J}\right)^{i-1} u_1 \, , \; i \geq 1 \implies$$

$$h_i = h_{i-1} - \left(\frac{\theta}{J}\right)^{i-1} \cdot u_1 \, , \; i \geq 1$$

$$h_i = h_{i-2} - \left(\frac{\theta}{J}\right)^{i-2} u_1 - \left(\frac{\theta}{J}\right)^{i-1} \cdot u_1$$

$$h_i = h_{i-3} - \left(\frac{\theta}{J}\right)^{i-3} \cdot u_1 - \left(\frac{\theta}{J}\right)^{i-2} \cdot u_1 - \left(\frac{\theta}{J}\right)^{i-1} u_1 \, , \; i \geq 1$$

$$h_i = \cancel{h_0}^{1} - \left(\frac{\theta}{J}\right)^{0} u_1 - \left(\frac{\theta}{J}\right)^{1} u_1 - \ldots - \left(\frac{\theta}{J}\right)^{i-1} u_1 \, , \; i \geq 1$$

$$h_i = 1 - \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{\theta}{J}\right)^{k} \cdot u_1 \, , \; i \geq 1.$$

Για να είναι μη-αρνητική $h_i \geq 0$ θα πρέπει

$$u_1 \leq \frac{1}{\sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{\theta}{J}\right)^{k}} \, , \; \forall i \geq 1$$

Άρα, θα πρέπει το $u_1 \leq \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{J}\right)^{k}}$

Για να πάρουμε την ελάχιστη λύση, πρέπει

$$u_1 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{J}\right)^{k}}$$

- Αν $\frac{\theta}{J} \geq 1 \iff \theta \geq J$, τότε $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{J}\right)^{k} = \infty \Rightarrow u_1 = 0$

$$\Rightarrow h_i = 1 \, , \; \forall i \geq 1$$

- Αν $\frac{\theta}{J} < 1 \iff \theta < J$, τότε $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{J}\right)^{k} = \dfrac{1}{1 - \frac{\theta}{J}}$

$$\Rightarrow u_1 = 1 - \frac{\theta}{J} \quad \text{και} \quad h_i = \left(1 - \frac{\theta}{J}\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{\theta}{J}\right)^i}{1 - \frac{\theta}{J}} = 1 - 1 + \left(\frac{\theta}{J}\right)^i$$

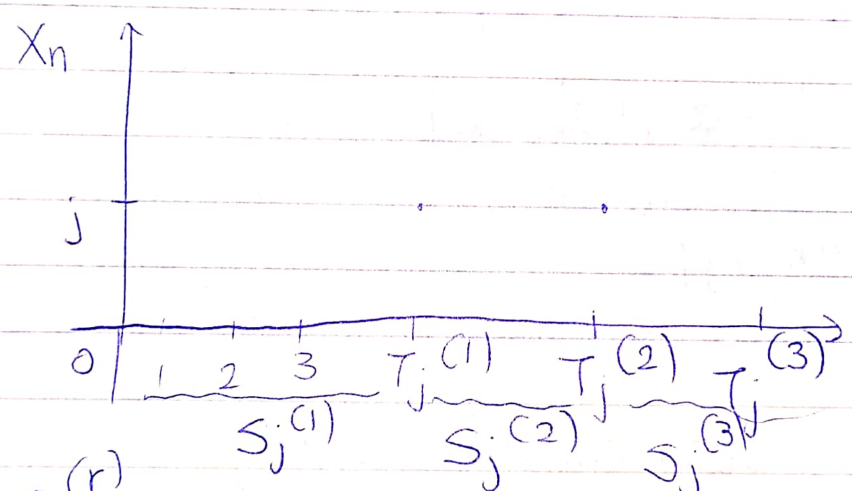
$$\Rightarrow \quad h_i = \left(\frac{\theta}{J}\right)^i, \; i \geq 1$$

3.5 Παροδικοτητα κ' Επαναληπτικοτητα Καταστασεων

Συνδεση ΜΑΔΧ με ανανεωτικη θεωρια

Εστω κατασταση $j \in S$

Υποθετουμε οτι τη στιγμη 0 βρισκεται στην κατασταση j (μηδενικη επισκεψη)



$T_j^{(r)}$: χρονος r-οστης επισκεψης στην κατασταση j

$$T_j^{(1)} = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}$$

$$T_j^{(r)} = \inf\{n \geq T_j^{(r-1)} + 1 : X_n = j\}$$

$T\{j\} = \inf\{n \geq 0 : X_n = j\}$

χρονος $1^{ης}$ εισοδου

$S_j^{(r)}$ = χρονος μεταξυ $(r-1)$-οστης και r-οστης επισκεψης στην καταστ. j.

Οι $S_j^{(r)}, r \geq 1$ ειναι ανεξ κ' ισονομες τμ

Αν $N_j(n) = \#$ επισκεψεων στην j μεχρι και το βημα n, τοτε $\{N_j(n), n \geq 0\}$ ειναι ανανεωτικη διαδικασία.

$h_j(\{j\}) = h_j$ = πιθανοτητα επανοδου στην j

$$h_j(\{j\}) = 1$$

$$= P(T_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j)$$

$$= P(S_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j)$$

$$= \sum_{k \in S} p_{jk} h_k(\{j\})$$

$m_j(\{j\}) = m_j$ = μεσος χρονος επανοδου στην j

$$m_j(\{j\}) = 0$$

$$= E[T_j^{(1)} \mid X_n = j]$$

$$= E[S_j^{(1)} \mid X_0 = j]$$

$$= 1 + \sum_{k \in S} p_{jk} m_k(J)$$

Από την ανανεωτική θεωρία έχουμε ότι

$$h_j = 1 \Leftrightarrow P(S_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j) = 1 \Rightarrow P(N_j(\infty) = \infty) = 1$$

δηλ η $\{N_j(n), n \geq 0\}$ είναι επαναληπτική

$$h_j < 1 \Leftrightarrow P(S_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j) < 1$$

$$\Rightarrow P(N_j(\infty) = k) = h_j^k (1 - h_j), k = 0, 1, 2 \ldots$$

δηλ η $\{N_j(n), n \geq 0\}$ είναι παροδική.

Ορισμός: (Επαναληπτική / Παροδική κατάσταση)

Έστω $j \in S$

i) Η j ονομάζεται επαναληπτική αν $h_j = 1$
Επιπλέον, αν $m_j < \infty$, η j λέγεται θετικά επαναληπτική.
αν $m_j = \infty$, η j λέγεται μηδενικά επαναληπτική.

ii) Η j λέγεται παροδική αν $h_j < 1$

Θεώρημα: (Χαρακτηρισμός παροδικότητας / επαναληπτικότητας)

Έστω $j \in S$

α) Η j επαναληπτική $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = \infty$

β) j παροδική $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < \infty$

Απόδειξη: α) j επαναληπτική $\Rightarrow P(N_j(\infty)=\infty)=1$

$\Rightarrow E[N_j(\infty) \mid X_0=j]=\infty$

Όμως, $N_j(\infty)=\sum_{n=1}^{\infty} 1\{X_n=j\}$

Οπότε, $E[\sum_{n=1}^{\infty} 1\{X_n=j\} \mid X_0=j]=\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} E[1\{X_n=j\} \mid X_0=j]=\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n=j \mid X_0=j)=\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}=\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)}=\infty$

β) j παροδική $\Rightarrow P(N_j(\infty)=k)=h_j^{k}(1-h_j)$, $k=0,1,\dots$

$E[N_j(\infty) \mid X_0=j] < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < \infty$

23/11/22 (15ο Μάθημα)

$h_j = 1$, $m_j < \infty \Leftrightarrow j$ θετ. επαναλ.

$h_j = 1$, $m_j = \infty \Leftrightarrow j$ μηδ. επαν.

$h_j < 1 \qquad \Leftrightarrow j$ παροδική

Κριτήριο: j επαναληπτική $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = \infty$

j παροδική $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < \infty$

Θεώρημα: (Επαναληπτικότητα/Παροδικότητα χαρακτηριστικό κλάσης επικοινωνίας)

a) i επαναληπτική κ' $i \leftrightarrow j \Rightarrow j$ επαναληπτική

β) i παροδική κ' $i \leftrightarrow j \Rightarrow j$ παροδική

Απόδειξη: i επαναληπτική

$$i \leftrightarrow j \Rightarrow \begin{cases} j \to i \Rightarrow \exists m > 0 : P_{ji}^{(m)} > 0 \\ i \to j \Rightarrow \exists n > 0 : P_{ij}^{(n)} > 0 \end{cases}$$

i επαναληπτική $\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} P_{ii}^{(r)} = \infty$

$$P_{jj}^{(m+r+n)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(r)} P_{ij}^{(n)}$$

Άρα, $\sum_{r=0}^{\infty} P_{ii}^{(r)} = \infty \Rightarrow$

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(r)} P_{ij}^{(n)} = \infty \Rightarrow$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_{jj}^{(m+r+n)} \geq \sum_{r=0}^{\infty} P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(r)} P_{ij}^{(n)} = \infty \Rightarrow$$

$r' = m + r + n \Rightarrow$

$$\sum_{r'=m+n}^{\infty} P_{jj}^{(r')} = \infty \Rightarrow \sum_{r'=0}^{\infty} P_{jj}^{(r)} = \infty \Rightarrow j \text{ επαναληπτική}$$

β) i παροδική $\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} P_{ii}^{(r)} < \infty$

$$i \leftrightarrow j \Rightarrow \begin{cases} \exists m > 0 : P_{ji}^{(m)} > 0 \\ \exists n > 0 : P_{ij}^{(n)} > 0 \end{cases}$$

$$P_{ii}^{(m+r+n)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jj}^{(r)} P_{ji}^{(m)}$$

Άρα, $\sum_{r=0}^{\infty} P_{ii}^{(r)} < \infty \Rightarrow \sum_{r=n+m}^{\infty} P_{ii}^{(r)} < \infty \Rightarrow r' = r - n - m$

$$\sum_{r'=0}^{\infty} P_{ii}^{(n+r'+m)} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{r'=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} P_{jj}^{(r')} P_{ji}^{(m)} \leq \sum_{r'=0}^{\infty} P_{ii}^{(m+r+n)} < \infty$$

$$P_{ij}^{(n)} \left(\sum_{r'=0}^{\infty} P_{jj}^{(r')} \right) P_{ji}^{(m)} < \infty \Rightarrow$$

$$\sum_{r'=0}^{\infty} P_{jj}^{(r')} < \infty \Rightarrow j \text{ παροδική}$$

Θεώρημα: Αν $i \leftrightarrow j$ i θετικά επαναληπτική ή (μηδ. επαναληπτική, παροδική) $\Rightarrow$ j θετικός επαναληπτική (μηδ. επαναλ, παροδική)

Ορισμός: Μια κλάση επικοινωνίας ονομάζεται θετικά επαναληπτική, μηδ. επαν., παροδική αν όλες οι καταστάσεις της είναι θετικά επαναλ., μηδ. επαναλ., παροδικές.

Θεώρημα: Αν μια κλαση είναι επαναληπτική τοτε είναι κλειστή.

β) Αν μια κλαση είναι ανοιχτη, τοτε είναι παροδική.

Αποδειξη: α) Εστω C επαναληπτική. Εστω C ανοιχτη τοτε $\exists i \in C$ και $j \notin C$ $i \to j$ και $j \not\to i$

Εφοσον, $i \to j$, $\exists$ ελαχιστο m $p_{ij}^{(m)} > 0$

Ομως, $i \in C$, C επαναληπτικη $\Rightarrow$ i επαναληπτικη

$$h_i = 1 \Leftrightarrow P(T_i^{(1)} < \infty \mid X_0 = i) = 1 \overset{\text{θ.ο.π}}{\Rightarrow}$$

$$\sum_{k \in S} P(T_i^{(1)} < \infty \mid X_0 = i, X_m = k) \underbrace{P(X_m = k \mid X_0 = i)}_{p_{ik}^{(m)}} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} P(T_i^{(1)} < \infty \mid X_0 = i, X_m = k) = 1$$

$$\sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} = 1$$

$$\Rightarrow P(T_i^{(1)} < \infty \mid X_0 = i, X_m = k) = 1 \ \forall k \text{ με } p_{ik}^{(m)} > 0$$

$$\overset{p_{ij}^{(k)} > 0}{\Longrightarrow} P(T_i^{(1)} < \infty \mid X_0 = i, X_m = j) = 1$$

Ατοπο! αφου $j \not\to i$. Αρα C κλειστό.

Θεώρημα: Αν C κλειστη κ' πεπερασμενη κλαση τοτε C θετικα επαναληπτικη

Αποδειξη: Εστω C κλειστη και πεπερασμενη και εστω οτι $X_0 \in C$. Αρα, $\exists i \in C$:

$$P(\text{Η } \{X_n\} \text{ να επισκεφτει την } i \ \infty \text{ φορες}) > 0$$

$$\Rightarrow P\left(\begin{array}{l}\text{να επισκεφθει την } i \\ \text{πρωτη φορα}\end{array}\right) \cdot \underbrace{P\left(\begin{array}{l}\text{να επισκεφθει} \\ \text{την } i \ \infty \text{ φορες}\end{array} \middle| X_0 = i\right)}_{P(N_i(\infty) = \infty)} >

$P(N_i(\infty)=\infty)>0 \Rightarrow$ αρα i επαναληπτική
$\Rightarrow$ C_i επαναληπτική.

Τελικώς, C_i ανοιχτή $\Rightarrow$ C_i παροδική
C_i κλειστή κ' πεπερ $\Rightarrow$ C_i θετ. επαναληπτική
C_i κλειστή $\Rightarrow$? (στασιμη κατανομή)

3.6 Στασιμη Κατανομη

Ορισμός: Εστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χκ S και πινακα πιθ. μεταβασης P. Ενα διανυσμα $\lambda=[\lambda_i]_{i\in S}$ ονομαζεται στασιμο μετρο αν ισχυει $\lambda P=\lambda \Leftrightarrow$

$$\sum_{i\in S}\lambda_i P_{ij}=\lambda_j,\ \forall j\in S$$

Εξισωσεις Πλήρους Ισορροπίας.

Επιπλέον, αν $\sum_{i\in S}\lambda_i=1$ (Εξισωση κανονικοποίησης)

τοτε ονομαζεται στασιμη κατανομη.

Σημειωση: Αν S πεπερασμενο, το λ ειναι στασιμο μετρο ανν ειναι αριστερο ιδιοδιανυσμα του P με αντιστοιχη ιδιοτιμη την 1.

Θεώρημα: $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με πεπερασμενο χκ S $|S|=k$, τοτε $\exists$ στασιμη κατανομή.

Αποδειξη: Εστω $e'=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ k-στοιχεια, τοτε $Pe'=e'$ διοτι

$\sum_{j\in S}P_{ij}=1\ \forall\ i\in S$. Αρα δεξί ιδιοδιανυσμα του P με αντιστοιχη ιδιοτ. το 1

Οπότε, υπάρχει αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P με ιδιοτιμή του P με ιδιοτιμή το 1, δηλαδή $\exists$ $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_k) : \lambda P = 1\lambda$. Τότε το $\pi = [\pi_1 \ldots \pi_k]$ με $\pi_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{j \in S} \lambda_j}$, $i \in S$ ικανοποιεί τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας.

$$\pi P = \frac{\lambda}{\sum_{j\in S} \lambda_j} \cdot P = \frac{\lambda}{\sum_{j \in S} \lambda_j} = \pi$$

και την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{i \in S} \pi_i = \sum_{i \in S} \frac{\lambda_i}{\sum_{j\in S} \lambda_j} = \frac{1}{\sum_{j \in S} \lambda_j} \sum_{i \in S} \lambda_i = 1$$

Θεώρημα: $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ στάσιμη κατανομή π

$$\pi^{(0)} = \pi$$

$\Rightarrow$ Τότε και η μεταβατική κατανομή $\pi^{(n)} = \pi$

Απόδειξη: Έστω η στάσιμη τότε $\pi P = \pi$ τότε

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n = \underbrace{\pi P}_{\pi} P^{n-1} = \pi P^{n-1} = \underbrace{\pi P}_{\pi} P^{n-2} = \pi P^{n-2} = \ldots = \pi$$

Θεώρημα: $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ πεπερασμένος χκ S $|S| = k$ για κάποιο $i \in S$, $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \forall j \in S$

$\Rightarrow \pi = [\pi_1, \ldots \pi_k]$ είναι στάσιμη κατανομή.

Απόδειξη: Θα δείξω ότι $\pi e' = 1$ και $\pi P = \pi \Leftrightarrow \sum_{k \in S} \pi_k P_{kj} = \pi_j$ $\forall j \in S$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

Έχουμε, $\sum_{j\in S} \pi_j = \sum_{j\in S} \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j\in S} P_{ij}^{(n)}}_{1} = 1$

και $\sum_{k\in S} \pi_k p_{kj} = \sum_{k\in S} \lim_{n\to\infty} \pi_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}$

$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k\in S} P_{ik}^{(n)} P_{kj}}_{= P_{ij}^{(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n+1)} = \pi_j$

Ορισμός: (μέσος # επισκεψεων στην i μεταξυ 2 διαδοχικων επισκεψεων στην k).

$$m_i^{(k)} = E\Big[\sum_{n=0}^{T_k^{(1)}-1} 1\{X_n = i\} \,\Big|\, X_0 = k\Big] \quad (*)$$

Εστω, $k\in S$ και $T_k^{(1)} = \inf\{n\geq 1, X_n = k\}$ ο χρόνος $1^{ης}$ επισκεψης στην k, τοτε για $i\in S$ ισχύει η $(*)$. Είναι ο μέσος αριθμος επισκεψεων στην i μεταξυ 2 διαδοχικων επισκεψεων στην k.