24/10/22 (8ο Μάθημα)

Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l}\cdot \{N(t), t\geq 0\} \\ \text{επαναληπτική RP} \\ \text{με } E[X_n] = \tau > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau} \text{ μπ1}$$

Απόδειξη:

$S_{N(t)}$ $\quad$ $S_{N(t)+1}$

↑ t χρόνος τελευταίου γεγονότος μέχρι την t

↑ χρόνος 1ου γεγονότος μετά την t

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$$

Αν $N(t)>0$, έχουμε $\dfrac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \dfrac{t}{N(t)} < \dfrac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$

Επαναληπτική $\{N(t)\}_{t\geq 0}$

$N(t)\to\infty$ καθώς $t\to\infty$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$$

$\overset{\text{Ισχ. Νόμος Μεγάλων Αριθμών}}{=} E[X_k] = \tau$ μ.π.1

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\downarrow \atop 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} X_k}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{\text{Μεγ. Αριθ.}}{\overset{\text{Ισχ Νόμο}}{=}} \underset{\text{μ.π.1}}{E[X_k] = \tau}$$

Έχουμε • $\frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \Rightarrow \limsup_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)}$

$$\leq \lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \tau$$

• $\frac{t}{N(t)} \geq \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \Rightarrow \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)}$

$$\geq \lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \tau$$

Άρα $\tau \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} \leq \tau$

$$\Rightarrow \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \tau$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \tau$$

Λόγω της συνέχειας της $f(x)=\frac{1}{x}$ για $x>0$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\tau}$$

Ορισμός: (LST συναρτήσεων)

Έστω $F:[0,\infty)\to(-\infty,\infty)$ ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes ορίζεται ως

$$\tilde{F}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x)$$

Ιδιότητες: Έστω $F:[0,\infty)\to(-\infty,\infty)$ και $G:[0,\infty)\to(-\infty,+\infty)$

1) $F(x)=1$ τότε $\tilde{F}(s)=1$
2) Αν $F(x)=x$, τότε $\tilde{F}(s)=\frac{1}{s}$
3) $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ τότε $\tilde{F}(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}$
4) Αν $H(x)=aF(x)+bG(x)$ a,b σταθερές τότε: $\tilde{H}(s)=a\tilde{F}(s)+b\tilde{G}(s)$
5) Αν $H(x)=\int_0^x F(x-t)dG(t)$ τότε

$$\tilde{H}(s)=\tilde{F}(s)\cdot\tilde{G}(s)$$

2.3 Ανανεωτική συνάρτηση

Ορισμός: (Ανανεωτική συνάρτηση)
Έστω $\{N(t), t\geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία

Η συνάρτηση $M(t) = E[N(t)]$ $t \geq 0$ ονομάζεται ανανεωτική συνάρτηση. Ο LST της $M(t)$ συμβολίζεται με $\tilde{M}(s)$ και ισούται με

$$\tilde{M}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dM(t)$$

Θεώρημα: $\{N(t), t \geq 0\}$ RP με $M(t) = E[N(t)], t \geq 0$ και G σκ των X_k, $k \geq 1$

$$\Rightarrow \text{Τότε } M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G^{*k}(t)$$

Απόδειξη: $M(t) = E[N(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} 1\{S_k \leq t\}\right]$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E[1\{S_k \leq t\}]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_r(S_k \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} G^{*k}(t)$$

Θεώρημα:

$$\left.\begin{array}{l} \{N(t), t \geq 0\} \text{ RP} \\ \text{με } M(t) = E[N(t)] \\ \text{και G σκ των } X_k, k \geq 1 \end{array}\right\} M(t) \neq G(t)$$

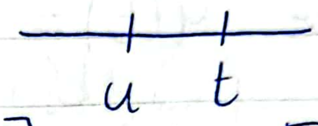
$$\Rightarrow M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-u)\, dG(u)$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

• Αποδειξη: Εφαρμόζουμε ανανεωτικό συλλογισμό δεσμευουμε ως προς S_1

$$M(t) = E[N(t)] = \int_0^\infty E[N(t)|S_1=u]\,dG(u)$$

Όμως, αν $u \le t$



$$E[N(t)|S_1=u] = 1 + E[N(t-u)]$$

αν $u>t$

$$E[N(t)|S_1=u] = 0$$

Άρα, $M(t) = \int_0^t (1+E[N(t-u)]) = \int_0^t (1+M(t-u))\,d$

$$+ \int_t^\infty 0\,dG(u)$$

$$\Rightarrow M(t) = \int_0^t dG(u) + \int_0^t M(t-u)\,dG(u)$$

$$M(t) = G(t) + (M*G)(t)$$

Παίρνω LST:

$$\tilde{M}(s) = \tilde{G}(s) + \tilde{M}(s)\cdot\tilde{G}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{M}(s)(1-\tilde{G}(s)) = \tilde{G}(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

Θεώρημα:

Η ανανεωτική διαδικασια $\{N(t), t \geq 0\}$ χαρακτηρίζεται πλήρως απο την $M(t), t \geq 0$

Αποδ:

Έχουμε δ.ο η ανανεωτική διαδικασία χαρακτηρίζεται απο τη σκ G.

Επίσης, $\tilde{G}(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{1+\tilde{M}(s)}$ αρα η $\tilde{G}(s)$ χαρακτηρίζεται απο την $\tilde{M}(s)$

Άρα, η ανανεωτικη διαδ. χαρακτηρίζεται απο τη $M(t)$

Θεώρημα:

$$\left.\begin{array}{l} \{N(t), t \geq 0\} \quad RP \\ \text{με} \quad E[X_k] = \tau > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M(t) < \infty \quad \forall t \geq 0$$

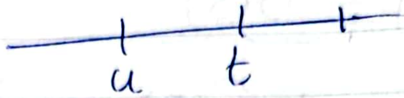
Άσκηση:

Νδο $E[S_{N(t)+1}] = \tau(M(t)+1)$

Λύση: $E[S_{N(t)+1}] = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} / S_1 = u]\, dG(u)$

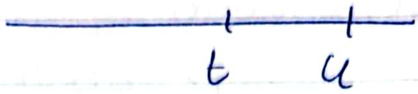
Scanned with CamScanner

Αν $u \le t$



$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = u + E[S_{N(t-u)+1}]$$

Αν $u > t$



$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = u$$

$$\Rightarrow E[S_{N(t)+1}] = \int_0^t u + E[S_{N(t-u)+1}]\, dG(u) + \int_t^\infty u\, dG(u)$$

$$\Rightarrow E[S_{N(t)+1}] = \int_0^t u\, dG(u) + \int_t^\infty u\, dG(u) + \int_0^t E[S_{N(t-u)+1}]\, dG(u)$$

$$H(t) = E[S_{N(t)+1}] = \int_0^\infty u\, dG(u) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

$$H(t) = \tau + (H * G)(t) \xRightarrow{LST}$$

$$\tilde{H}(s) = \tau + \tilde{H}(s) \cdot \tilde{G}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s)(1 - \tilde{G}(s)) = \tau$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tau}{1 - \tilde{G}(s)}$$

$$\frac{1}{1-\tilde{G}(s)} = \frac{1 - \tilde{G}(s) + \tilde{G}(s)}{1 - \tilde{G}(s)} = 1 + \tilde{M}(s)$$

$$\tilde{H}(s) = \tau + \tau \tilde{M}(s) \overset{\text{αναστρ.}}{\underset{\text{LST}}{\Leftrightarrow}}$$

$$H(t) = \tau + \tau \cdot M(t) \Rightarrow$$

$$H(t) = \tau(1 + M(t))$$

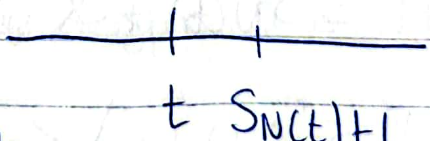
$$E[S_{N(t)+1}] = H(t) = \tau(1 + M(t))$$

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεωρ. για $M(t)$

$$\left.\begin{array}{l} \{N(t),\ t \geq 0\}\ RP \\ \text{με}\ \tau > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{M(t)}{t}}_{\substack{\text{μακροπροθεσμος} \\ \text{μεσος ρυθμος} \\ \text{ανανεωσεων}}} = \frac{1}{\tau}$$

Αποδειξη: Για $\tau < \infty$:

Εχουμε $S_{N(t)+1} > t$



$$E[S_{N(t)+1}] > t$$

$$\tau[M(t) + 1] > t$$

$$M(t) + 1 > \frac{t}{\tau}$$

$$M(t) > \frac{t}{\tau} - 1$$

$$\frac{M(t)}{t} > \frac{1}{\tau} - \frac{1}{t}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\tau}$$

Θεωρούμε σταθερό $T \in (0,\infty)$ και κατασκευάζουμε μια νέα ανανεωτική διαδικασία την $\{N^*(t)\}$ με ενδ. χρόνους ανανέωσης

$$X_n^* = \min\{X_n, T\}$$

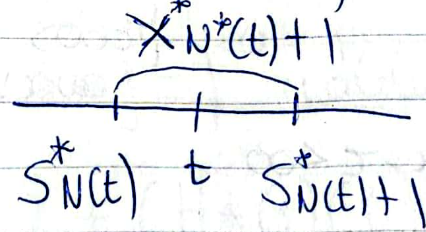
Έχουμε

$$X_n^* \leq X_n, \quad n \geq 1$$

$$S_k^* \leq S_k, \quad k \geq 1$$

$$N^*(t) \geq N(t), \quad t \geq 0$$

$$M^*(t) \geq M(t), \quad t \geq 0$$



$$S_{N^*(t)+1} = S^*_{N^*(t)} + X^*_{N^*(t)+1} \leq t + T$$

$$\Rightarrow E[S^*_{N^*(t)+1}] \leq t + T$$

$$\tau^* \left[M^*(t) + 1 \right] \leq t + T$$

$$\Rightarrow M^*(t) \leq \frac{t}{\tau^*} + \frac{T}{\tau^*} - 1$$

$$\frac{M(t)}{t} \leq \frac{M^*(t)}{t} \leq \frac{1}{\tau^*} + \frac{T - \tau^*}{\tau^* \cdot t}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\le\frac{1}{\tau^*} \overset{\tau\to\infty}{\Longrightarrow} \limsup_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}\le\frac{1}{\tau}$$

Άρα $\frac{1}{\tau}\le\liminf_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\le\limsup_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\le\frac{1}{\tau}$

26/10/22 (9º Μαθημα)

2.1 Ανανεωτικές Εξισώσεις

Παράδειγμα:

Θεωρουμε μια μηχανη που εναλλασσεται μεταξυ 2 καταστασεων ενεργη ή μη-ενεργη. Η διαρκεια του χρονου λειτουργιας ειναι $Exp(\mu)$. Ο χρονος επισκευης $= c\{$προηγ χρονου λειτουργιας$\}$, $c>0$

Εστω $H(t)=P($η μηχανη να λειτουργει τη στιγμη $t)$

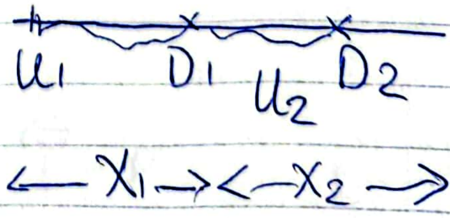
Θεωρουμε οτι τη στιγμη 0 η μηχανη μπαινει σε λειτουργια.

U_k = k-οστος χρονος ζωης $\sim Exp(\mu)$

D_k = k-οστος χρονος επισκευης, $D_k = cU_k$

$X_k = U_k + D_k + cU_k = (1+c)U_k$

$$G(x) = P(X_k\le x) = P((1+c)U_k\le x) = P\left(U_k\le\frac{x}{1+c}\right) = 1-e^{-\mu\frac{x}{c+1}}$$



$X_k \sim Exp\left(\frac{\mu}{c+1}\right)$

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ η απαριθμητρια με ενδ χρονους γεγονοτων $\{X_k, k \geq 1\}$
Η $\{X_k, k \geq 1\}$ είναι ακολουθια ανεξ κ' ισονομων τμ, άρα η $\{N(t), t \geq 0\}$ RP

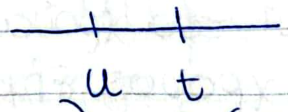
$N(t) = \#$ επαναλειτουργιων στο $(0, t]$

Έστω $I(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανη λειτουργει τη στιγμη } t \\ 0, & \text{αν δε λειτουργει} \end{cases}$

$$H(t) = P(I(t) = 1)$$

$$H(t) = P(I(t) = 1) = \int_0^\infty P(I(t) = 1 | X_1 = u)\, dG(u)$$

Αν $u \leq t$:

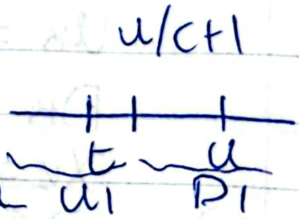


$$P(I(t) = 1 | X_1 = u) = P(I(t-u) = 1) = H(t-u)$$

Αν $u > t$:

$$P(I(t) = 1 | X_1 = u)$$

Έχουμε $U_1 + D_1 = u$
$\Rightarrow U_1 + cU_1 = u$
$U_1 = \dfrac{u}{c+1}$



$$P(I(t) = 1 | X_1 = u) = \begin{cases} 1, & t \leq \frac{u}{c+1} \\ 0, & \frac{u}{c+1} < t \leq u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1, & u \geq t(c+1) \\ 0, & t(c+1) > u \geq t \end{cases}$$

Άρα, $H(t) = \int_0^\infty P(I(t)=1 \mid X_1 = u)\, dG(u) \Rightarrow$

$$H(t) = \int_0^t H(t-u)\,dG(u) + \int_t^{t(c+1)} 0\, \cancel{dG(u)} + \int_{t(c+1)}^\infty 1\, dG(u)$$

$$\Rightarrow H(t) = 1 - G(t(c+1)) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

$$\Rightarrow H(t) = 1 - (1 - e^{-\frac{\mu}{c+1}\cdot t(c+1)}) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

Παίρνουμε LST:

$$\tilde{H}(s) = 1 - \frac{\mu}{\mu+s} + \tilde{H}(s)\tilde{G}(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{H}(s) = 1 - \frac{\mu}{\mu+s} + \frac{\tilde{H}(s)\frac{\mu}{c+1}}{\frac{\mu}{c+1}+s}$$

$$\tilde{H}(s)\left[1 - \frac{\frac{\mu}{c+1}}{\frac{\mu}{c+1}+s}\right] = \frac{s}{\mu+s}$$

$$\tilde{H}(s)\frac{s}{\frac{\mu}{c+1}+s} = \frac{s}{\mu+s}$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{\frac{\mu}{c+1}+s+\mu-\mu}{\mu+s} = 1 - \mu\left(\frac{1-\frac{1}{c+1}}{\mu+s}\right)$$

Scanned with CamScanner

$$\tilde{H}(s) = 1 - \frac{\mu}{\mu+s}\frac{c}{c+1}$$

αντιστρέφοντας
$$\Rightarrow \quad H(t) = 1 - \frac{c}{c+1}\left(1-e^{-\mu t}\right)$$

$$\boxed{H(t) = \frac{1}{c+1} - \frac{c}{c+1}e^{-\mu t}}$$

Ορισμός: (Ανανεωτικές Εξισώσεις)

Αν έχω μια γνωστή συνάρτηση $D(t)$ μια γνωστή σκ $G(t)$ με $G(0^-)=0$, $G(\infty)=1$ και μια αγνωστη συναρτηση $H(t)$, τοτε η εξισωση $H(t) = D(t) + \int^{t} H(t-u)\,dG(u)$ $t\geq 0$ ονομαζεται ανανεωτική εξισωση.

$$\Rightarrow H(t) = D(t) + (H*G)(t)$$

Παρατηρήσεις: Ανανεωτικές Εξισώσεις προκύπτουν όταν εφαρμόζουμε ανανεωτικό συλλογισμό. Εχουμε ηδη δει ανανεωτικες εξισωσεις για την $M(t)$: $\underset{E[N(t)]}{M(t)} = G(t) + \int_0^t M(t-u)\,dG(u)$

και για την $H(t) = E[S_{N(t)+1}]$:

$$H(t) = \underset{E[X]}{\underset{\parallel}{\tau}} + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

Θεώρημα: (Λύση ανανεωτικής εξίσωσης)

Αν $|D(t)|<\infty$ $\forall t\geq 0$ τότε η ανανεωτική εξίσωση $H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG(u)$

έχει μοναδική λύση που δίνεται από τη σχέση $H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dM(u)$ όπου
$\;\;\;\;\;\; {}^{\shortparallel} E[N(t)]$
η $M(t)$ είναι ανανεωτική συνάρτηση της ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t), t\geq 0\}$ που έχει ενδιαμέσως χρόνους ανανέωσης με σκ ανανέωσης με $G(t)$.
Επίσης, ισχύει ότι $|H(t)|<\infty$

Αποδ.: $H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG(u) \overset{LST}{\Rightarrow}$

$$\tilde{H}(s)=\tilde{D}(s)+\tilde{H}(s)\tilde{G}(s)$$

$$\tilde{H}(s)(1-\tilde{G}(s))=\tilde{D}(s)$$

$$\tilde{H}(s)=\frac{\tilde{D}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \qquad \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}=\tilde{M}(s)$$

$$\frac{1}{1-\tilde{G}(s)}=\frac{1-\tilde{G}(s)+\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}=1+\tilde{M}(s)$$

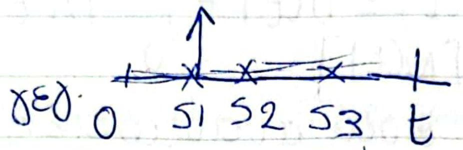
$$\Rightarrow \tilde{H}(s)=\tilde{D}(s)(1+\tilde{M}(s))$$

$$\Rightarrow \tilde{H}(s)=\tilde{D}(s)+\tilde{D}(s)\tilde{M}(s)$$

$$\Rightarrow H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dM(u)$$

Οικονομικη ερμηνεια της ανανεωτικης εξισωσης και της λυσης της.

Θεωρουμε μια ανανεωτικη διαδικασια $\{N(t), t\geq 0\}$ με ενδ χρονους γεγονοτων με σκ G.
Θεωρω οτι τη στιγμη 0 εχω το γεγονος 0.



$D(t)$ = συνολικη αμοιβη που γεννα ενα γεγονος t χρονικες μοναδες μετα την πραγματοποιηση του.

$H(t)$ = συνολικη αμοιβη απο ολα τα γεγονοτα στο $[0,t]$

$$\underbrace{H(t)}_{\substack{\text{συνολικη}\\ \text{αμοιβη απο}\\ \text{ολα τα γεγ.}\\ \text{στο } [0,t]}} = \underbrace{D(t)}_{\substack{\text{συνολικη}\\ \text{αμοιβη}\\ \text{στο } [0,t]\\ \text{απο το}\\ \text{γεγ. } 0}} + \underbrace{\int_0^t H(t-u)\,dG(u)}_{\substack{\text{συνολικη}\\ \text{αμοιβη των}\\ \text{υπολοιπων}\\ \text{γεγονοτων στο}\\ [u,t] \text{ δεδομενου}\\ \text{οτι το γεγονος}\\ \text{1 εγινε τη στιγμη } u}}$$

$$H(t) = \underbrace{D(t)}_{\substack{\text{αμοιβη}\\ \text{απο γεγ}\\ 0}} + \underbrace{\int_0^t D(t-u)\,dG(u)}_{\substack{\text{αμοιβη}\\ \text{απο}\\ \text{γεγον.}\\ 1.}} + \underbrace{\int_0^t D(t-u)\,dG^{*2}(u)}_{\substack{\text{αμοιβη}\\ \text{απο γεγονος}\\ 2}} + \dots$$

$$dG(u) = (dS_1(u))$$

$$\Rightarrow H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, d \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} G^{*k}(u)}_{H(u)}$$

2.5 Βασικό ανανεωτικό θεώρημα

Ορισμός: (Περιοδική τμ)

Μια μη-αρνητική τμ X λέγεται περιοδική αν $\exists\, d>0$ τ.ω

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = kd) = 1 \quad (1)$$

Το μέγιστο d που ικανοποιεί την (1) ονομάζεται περίοδος. Αν δεν υπάρχει τέτοιο d η X λέγεται απεριοδική.

Μια σκ G ονομάζεται περιοδική ή (απεριοδική) αν η αντίστοιχη τμ είναι περιοδική. (απεριοδική)

Ορισμός: (Περιοδική ή RP)
Μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέγεται περιοδική (απεριοδική) αν οι ενδ. χρόνοι γεγονότων είναι περιοδικές (απεριοδικές) τμ.