2.5. Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

Ορισμός (περιοδική τ.μ.)

Μια μη-αρνητική τ.μ. X καλείται περιοδική αν $\exists\, d>0$ τέτοιο ώστε
$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=kd)=1.$$

Το μέγιστο d που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση λέγεται περίοδος της X.

Αν δεν υπάρχει τέτοιο d, η X ονομάζεται απεριοδική.

Μια συνάρτηση κατανομής G ονομάζεται περιοδική (αντ. απεριοδική) όταν η αντίστοιχη τ.μ. X είναι περιοδική (αντ. απεριοδική).

Προφανώς, όλες οι συνεχείς τ.μ. στο $[0,\infty)$ είναι απεριοδικές και όλες οι μη-αρνητικές ακέραιες τ.μ. είναι περιοδικές.

Ορισμός (περιοδική ανανεωτική διαδικασία)

Μία ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t\geq 0\}$ λέγεται περιοδική (αντ. απεριοδική) όταν οι αντίστοιχοι ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων $X_n, n\geq 1$ είναι περιοδικές τ.μ. (αντ. απεριοδικές).

Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

Έστω $H(t)$ που ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση
$$H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$
όπου για την $D(t)$ ισχύουν

1. Η $D(t)$ είναι διαφορά
2. μη-αρνητικών φραγμένων μονότονων συναρτήσεων

και

2. $\int_0^\infty |D(t)|\,dt<\infty$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) Αν η G είναι απεριοδική με μ.τ. $\tau>0$, τότε
$$\lim_{t\to\infty} H(t)=\frac{1}{\tau}\int_0^\infty D(u)\,du.$$

(β) Αν η G είναι περιοδική με περίοδο d και μ.τ. $\tau>0$, τότε
$$\lim_{k\to\infty} H(kd+x)=\frac{d}{\tau}\sum_{k=0}^{\infty} D(kd+x).$$