Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Αστροφυσική Πλάσματος, 22 Ιουνίου 2016
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: ______________

Έχω παραδώσει στον κ. Βλαχάκη τις ομάδες ασκήσεων 1^{η} ☐ 2^{η} ☐ 3^{η} ☐ 4^{η} ☐ 5^{η} ☐
και στον κ. Τσίγκανο τις ομάδες ασκήσεων των Κεφ. 4 ☐ και 6 ☐.

Θέμα $1^{\text{ο}}$:

(α) Φορτίο κινείται σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ τα οποία είναι σταθερά και αμοιβαία κάθετα. Δείξτε ότι το οδηγό κέντρο της τροχιάς του φορτίου εκτελεί ταυτόχρονα δύο κινήσεις: (1) παράλληλα στο $\vec{B}$ με σταθερή ταχύτητα και (2) κάθετα στο $\vec{B}$ με ταχύτητα $c\vec{E} \times \vec{B}/B^2$. Συνεπώς, αν $\hat{b} = \dfrac{\vec{B}}{B}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου, η ταχύτητα του φορτίου γράφεται $\vec{V}_g = V_\parallel \hat{b} + c\dfrac{\vec{E} \times \hat{b}}{B}$.
(β) Δείξτε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει και για την ταχύτητα μιας μαγνητισμένης ροής με άπειρη αγωγιμότητα.

Θέμα $2^{\text{ο}}$:

Έστω στατική στήλη πλάσματος ακτίνας R, με μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_z(\varpi)\hat{z} + B_\phi(\varpi)\hat{\phi}$ και αμελητέα θερμική πίεση.
(α) Αν η αξονική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου είναι $B_z = \dfrac{B_0}{1+\varpi^2/\varpi_0^2}$ όπου B_0 και ϖ_0 σταθερές, δείξτε μέσω της εξίσωσης της ορμής ότι η αζιμουθιακή συνιστώσα του πεδίου είναι $B_\phi = \pm\dfrac{\varpi}{\varpi_0}B_z$.
(β) Ποια είναι η μαγνητική πίεση για το παραπάνω πεδίο; Ποια είναι η κλίση της και ποιά δύναμη την εξουδετερώνει;
(γ) Τι θα συμβεί αν διαταράξουμε την ισορροπία της στήλης δημιουργώντας ένα τοπικό στένωμα; Περιγράψτε ποιοτικά αν και πότε η στήλη είναι ασταθής.
(δ) Επαναλάβατε αν διαταράξουμε την ισορροπία της στήλης καμπυλώνοντάς την τοπικά.

Θέμα $3^{\text{ο}}$:

1. Γράψτε τις βασικές εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής που διέπουν ένα πολυτροπικό μοντέλο ενός ακτινικού Ηλιακού Ανέμου με πολυτροπικό δείκτη γ. Θεωρείστε αδιάστατες μεταβλητές, δλδ, την αδιάστατη ακτινική απόσταση $R = r/r_o$, την αδιάστατη πυκνότητα ρ σε μονάδες της πυκνότητας $\bar{\rho}_o$ στη βάση του ανέμου r_o και την αδιάστατη ταχύτητα $M_o = V/V_{so}$, σε μονάδες της ταχύτητας του ήχου στη βάση V_{so}.

2. Συνδυάζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις δείξτε ότι προκύπτει το ολοκλήρωμα διατήρησης της ενέργειας,

$$\boxed{\frac{M_o^2}{2} - \frac{\lambda}{R} + \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{\mu}{M_o R^2}\right)^{\gamma-1} = E\,,}$$

   όπου E είναι η αδιάστατη τιμή της ενέργειας ανά μονάδα μάζας και V_{so}^2, ενώ μ είναι ο αδιάστατος ρυθμός απώλειας μάζας :

$$\mu = \frac{\dot{M}}{4\pi\bar{\rho}_o V_{so} r_o^2} = \rho M_o R^2\,.$$

3. Αν η ταχύτητα του ανέμου στη βάση V_o είναι αμελητέα σε σχέση με την ταχύτητα στο άπειρο V_∞, υπολογίστε την ταχύτητα V_∞ συναρτήσει των V_{so}, γ και $\lambda = G\,M_\odot/r_0 V_{so}^2$.

4. Αν $\lambda = 10$, $\gamma = 1.05$ και $V_{so} = 140\,\mathrm{km/s}$, υπολογίστε την τερματική ταχύτητα του ανέμου V_∞.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Δίνονται η κλίση, η απόκλιση και ο στροβιλισμός σε κυλινδρικές συντετ/νες: $\vec{\nabla} f = \dfrac{\partial f}{\partial \varpi}\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{1}{\varpi}\frac{\partial(\varpi a_\varpi)}{\partial \varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z},\ \vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z}\right)\hat{\varpi} + \left(\frac{\partial a_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \varpi}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\varpi}\left[\frac{\partial(\varpi a_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial a_\varpi}{\partial \phi}\right]\hat{z}.$$