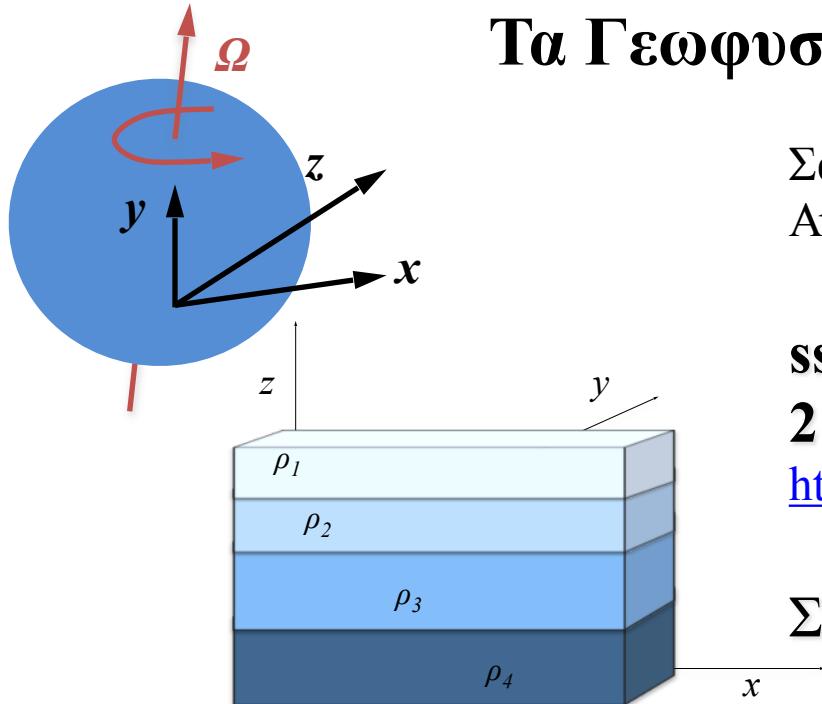


Δυναμική των Ρευστών, Μέρος Β'

Τα Γεωφυσικά Ρευστά



Σαράντης Σοφιανός
Αναπλ. Καθ. Φυσικής Ωκεανογραφίας

ssofian@phys.uoa.gr
2107276932/2107276839
<http://www.oc.phys.uoa.gr>

Σημειώσεις: e-class

- Εισαγωγή στη Δυναμική των Γεωφυσικών Ρευστών
- Εισαγωγή στην Τύρβη
- Κυκλοφορία και κύματα στα Γεωφυσικά Ρευστά

Εισαγωγή στη Δυναμική των Γεωφυσικών Ρευστών



- **Εισαγωγικές έννοιες
(σύνδεση με Μέρος Α')**
- **Η επίδραση της περιστροφής**
- **Η επίδραση της στρωμάτωσης**
- **Ανάλυση κλίμακας στα γεωφυσικά ρευστά**
- **Ο δυναμικός στροβιλισμός**

A. Βασικές Εξισώσεις

1. Εξίσωση διατήρησης ορμής:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi + \mathbf{F}$$

Material derivative

$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$

advection

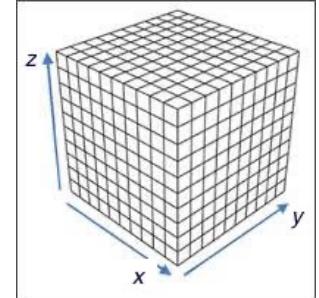
local rate of change

Pressure gradient

Non-conservative forces
e.g. $\mathbf{F} = \nu \nabla^2 \mathbf{u}$
(see next transparency)

$\Phi = -gz$

Force potential



$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \hat{\mathbf{z}} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{i})$$

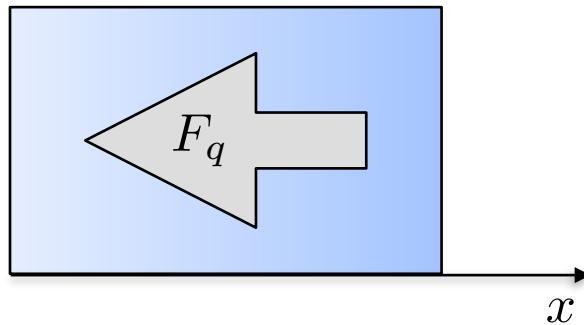
Non-linearity

$$Re = \frac{\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}}{\nu \nabla^2 \mathbf{u}} = \frac{U^2 L^2}{\nu U L} = \frac{UL}{\nu}$$

In the ocean,
usually
 $Re \gg 1$

Διάχυση ιδιοτήτων - Ιξώδες

Τυχαίες (μοριακές) κινήσεις μεταφέρουν ιδιότητες (π.χ. q) στο ρευστό,

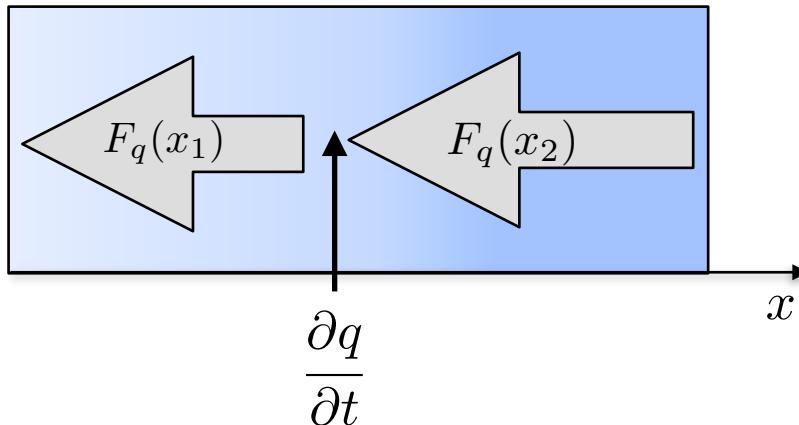


- **Flux=Force/Resistance** (De Groot, 1963)

$$F_q = -\kappa_q \frac{\partial q}{\partial x}$$

Flux of q medium Resistance Force (gradient)

Τυχαίες (μοριακές) κινήσεις μεταφέρουν ιδιότητες (π.χ. q) στο ρευστό,

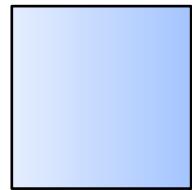


$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial F_q}{\partial x} = \kappa_q \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

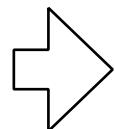
Για την ταχύτητα: resistance is μ (molecular viscosity)
and $\nu=\mu/\rho$ (kinematic viscosity):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Γιατί το ιξώδες ονομάζεται “μη συντηρητική δύναμη”?



Multiplying by ρu

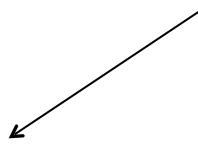


$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \rho u \frac{\partial u}{\partial t} = \rho u \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow$$

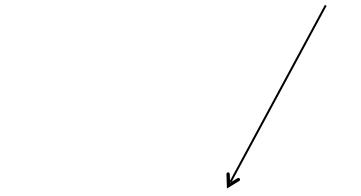
$$\Rightarrow \frac{\partial (\rho u^2/2)}{\partial t} = \rho \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (\rho u^2/2)}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (\rho u^2/2)}{\partial x} \right) - \rho \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (\rho u^2/2)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 (\rho u^2/2)}{\partial x^2} - \rho \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$



**Local rate of
change of energy
concentration**



**Kinetic Energy
Density Diffusion**



**Loss of Mechanical Energy
(Transformation to heat –
always negative)**

2. Εξίσωση διατήρησης της μάζας (συνέχειας):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$

για ασυμπίεστο ρευστό

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0^*$$

*Boussinesq
Continuity
Equation*

*Incompressibility (ασυμπιεστότητα)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u} \quad \xrightarrow{\downarrow}$$

$$\text{Compressibility } C = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = -\left(\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}\right) \left(\frac{dt}{dP}\right) = -\left(\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}\right) / \frac{dP}{dt}$$

$$\text{Αν αλλάζει η πίεση αλλά όχι ο όγκος } C = 0 \Rightarrow \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0$$

Χρησιμοποιώντας

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{V}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{V}\right) = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$$

Άρα ένα ρευστό είναι ασυμπίεστο όταν

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \sim \frac{1}{T} \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{U}{L} \frac{\delta\rho}{\rho} \ll \frac{U}{L} \sim \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = O(10^{-3})$$

3. Εξίσωση διατήρησης της συγκέντρωσης διαλυμένων υλικών:

$$\frac{dq}{dt} = \kappa \nabla^2 q + S^q \rightarrow \text{πηγές/“καταβόθρες”}$$

4. Εξίσωση διατήρησης της “εσωτερικής ενέργειας” (Θερμοκρασίας):

$$\frac{de}{dt} = -p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + Q$$

επίδραση πίεσης

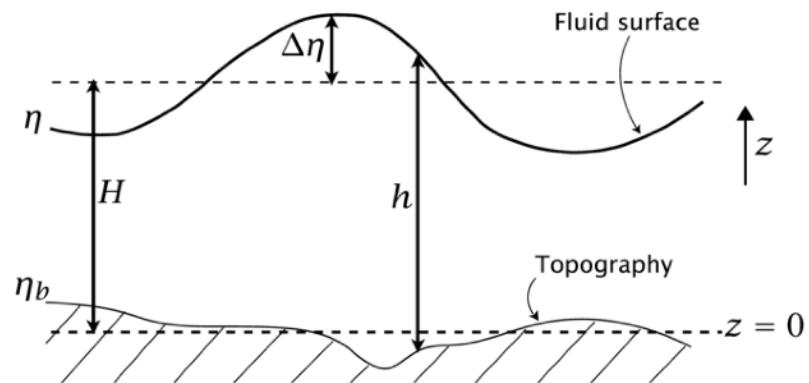
ψύξη/θέρμανση

Πρώτος νόμος Θερμοδυναμικής

5. Καταστατική Εξίσωση:

$$\rho = \rho(T, q, P)$$

Οριακές συνθήκες:



$$w = 0 \text{ at } z = \eta_b$$

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} \text{ at } z = \eta$$

w and p συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε z

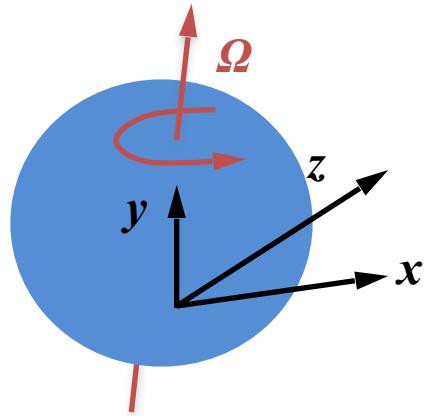
Β. Γεωφυσικά Ρευστά

Δυναμική των γεωφυσικών ρευστών

Στόχος: Η μελέτη των μεγάλης-κλίμακας δυναμικών χαρακτηριστικών των ρευστών, στον πλανήτη Γη και τους άλλους πλανήτες (π.χ. ατμόσφαιρα, ωκεανός, εξωτερικός πυρήνας, άλλοι πλανήτες και αστέρια).

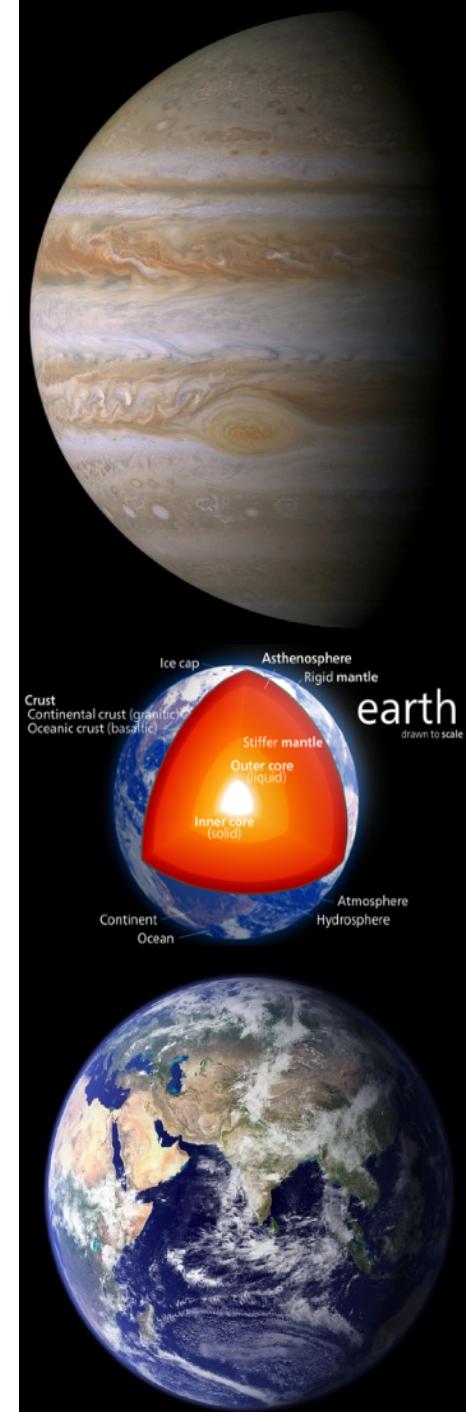
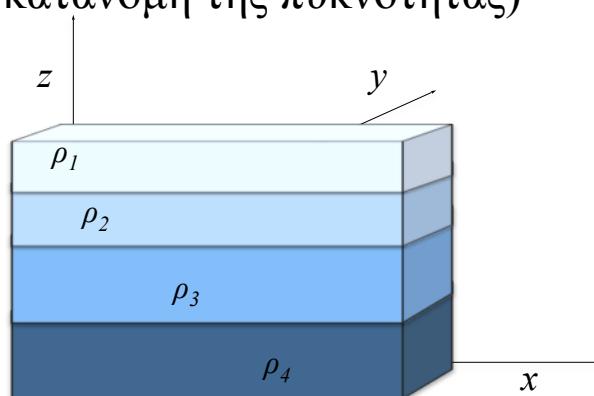
Βασικά χαρακτηριστικά:

- Περιστροφή

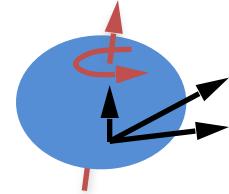


- Στρωμάτωση (κατά βάθος ή ύψος κατανομή της πυκνότητας)

Στην ατμόσφαιρα η πυκνότητα εξαρτάται από τη θερμοκρασία, την υγρασία και την πίεση. Στον ωκεανό η πυκνότητα εξαρτάται από τη θερμοκρασία, την αλατότητα και την πίεση.



ii. Η επίδραση της περιστροφής



Η ταχύτητα περιστροφής της γης:

$$\Omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{1\text{day} (= 24 \times 60 \times 60 \text{ s})}$$

* 1 *sideral day* = 23 hours 56 minutes 4.1 seconds

Για να έχει επίδραση η περιστροφή στην τροχιά ενός σωματιδίου (στοιχειώδης όγκος ρευστού) που περιγράφεται από την ταχύτητα U και το μήκος της διαδρομής L

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\text{time for one revolution}}{\text{time taken for a particle to cover distance } L \text{ at speed } U} = \\ &= \frac{2\pi/\Omega}{L/U} = \frac{2\pi U}{\Omega L}\end{aligned}$$

να είναι κοντά στη μονάδα ή μικρότερο.

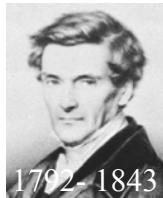
Παραδείγματα:

α. Ροή αέρα γύρω από το φτερό (**5 m**) αεροπλάνου που πετάει με ταχύτητα **100 m s⁻¹**: $\varepsilon \sim 2 \times 10^6$

β. Μπανιέρα (**1 m**) που αδειάζει με ροή **0.01 m s⁻¹**: $\varepsilon \sim 1000$

γ. Άνεμος που φυσάει με ταχύτητα **10 m s⁻¹** σε περιοχή διαστάσεων **1000 km**: $\varepsilon \sim 1$

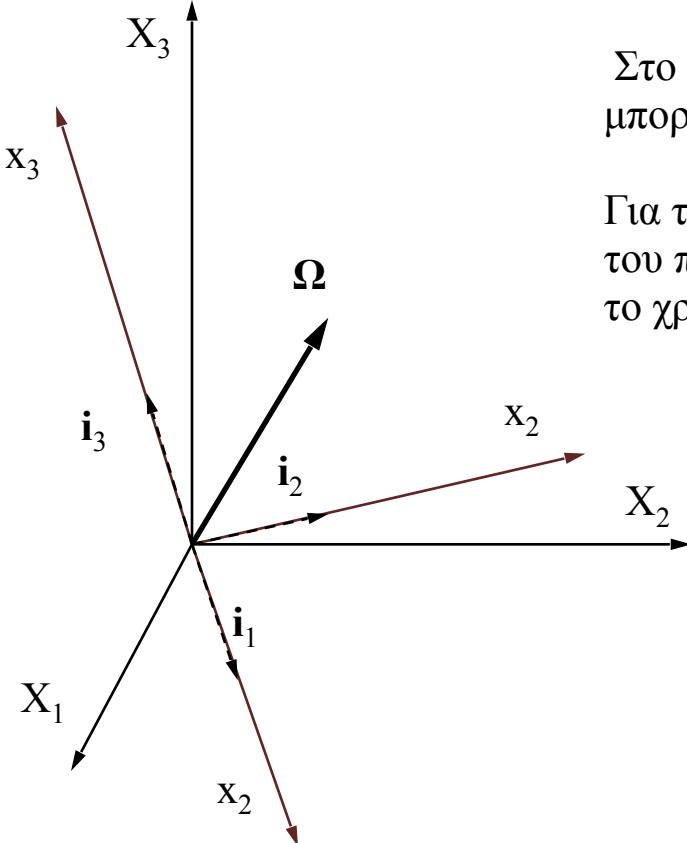
δ. Θαλάσσιο ρεύμα ταχύτητας **0.1 m s⁻¹** που παρουσιάζει μαιάνδρους **100 km**: $\varepsilon \sim 10^{-1}$



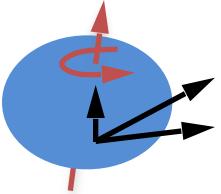
1792-1843

Gaspard Gustave de
Coriolis

Στις περιπτώσεις γ και δ η επίδραση της περιστροφής της γης είναι σημαντική, ενώ στις περιπτώσεις α και β όχι. Οι γ και δ είναι χαρακτηριστικές των γεωφυσικών ρευστών.



Στο περιστρεφόμενο σύστημα κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί $\mathbf{P} = P_1 \mathbf{i}_1 + P_2 \mathbf{i}_2 + P_3 \mathbf{i}_3$



Για τον παρατηρητή στο σταθερό σύστημα τα μοναδιαία διανύσματα του περιστρεφόμενου συστήματος (\mathbf{i}) μεταβάλουν τη θέση τους με το χρόνο. Άρα η χρονική μεταβολή του διανύσματος \mathbf{P} είναι

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_F &= \frac{d}{dt} (P_1 \mathbf{i}_1 + P_2 \mathbf{i}_2 + P_3 \mathbf{i}_3) \\ &= \mathbf{i}_1 \frac{dP_1}{dt} + \mathbf{i}_2 \frac{dP_2}{dt} + \mathbf{i}_3 \frac{dP_3}{dt} + P_1 \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + P_2 \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} + P_3 \frac{d\mathbf{i}_3}{dt} \end{aligned}$$

Για τον παρατηρητή του περιστρεφόμενου συστήματος η μεταβολή του \mathbf{P} είναι οι τρεις πρώτοι όροι, άρα

$$\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_F = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_R + P_1 \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + P_2 \frac{d\mathbf{i}_2}{dt} + P_3 \frac{d\mathbf{i}_3}{dt}$$

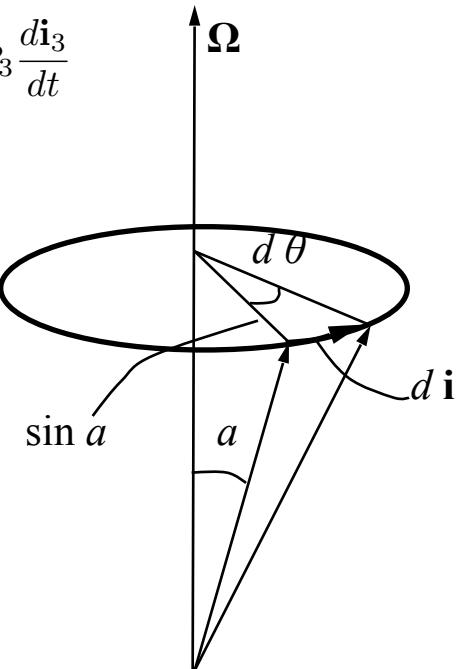
Η μεταβολή του \mathbf{i} σε χρόνο dt
είναι

$$\begin{aligned} |d\mathbf{i}| &= \sin a \, d\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \sin a \, \frac{d\theta}{dt} = \Omega \sin a = \Omega \times \mathbf{i} \end{aligned}$$

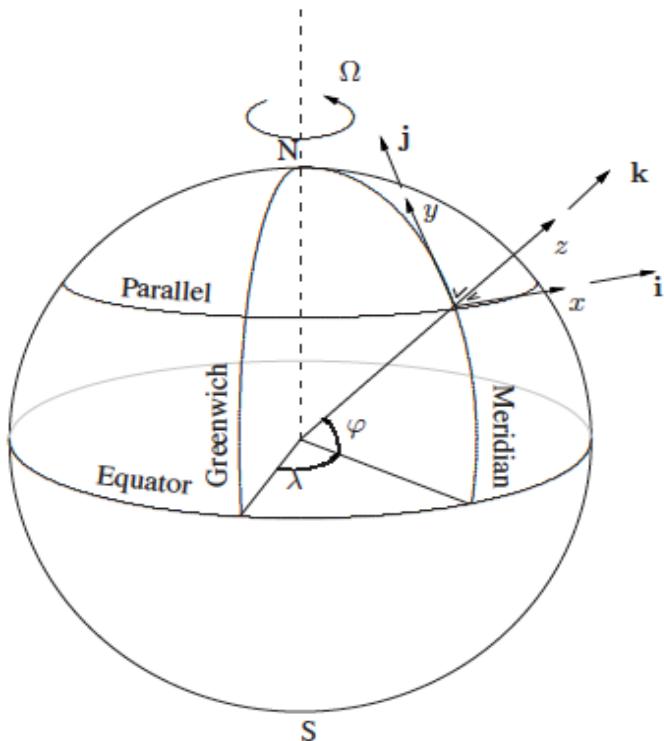
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \sin \varphi \cdot \mathbf{n})$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_F = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_R + \Omega \times \mathbf{P} \quad (1)$$



Η επιτάχυνση Coriolis



Χρησιμοποιώντας την (1)

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_F = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_R + \Omega \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{u}_R + \Omega \times \mathbf{r} \quad (2)$$

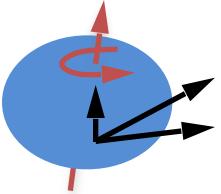
$$\left(\frac{d\mathbf{u}_F}{dt} \right)_F = \left(\frac{d\mathbf{u}_F}{dt} \right)_R + \Omega \times \mathbf{u}_F \quad (3)$$

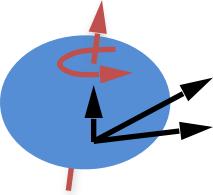
(2)&(3)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{u}_F}{dt} \right)_F &= \left(\frac{d\mathbf{u}_R}{dt} \right)_R + \frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{r} + \Omega \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_R + \Omega \times (\mathbf{u}_R + \Omega \times \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{u}_R}{dt} \right)_R + 2\Omega \times \mathbf{u}_R + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + \cancel{\frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{r}} \end{aligned}$$

**Coriolis
acceleration**

**Centrifugal
acceleration**





$$\left(\frac{d\mathbf{u}_F}{dt} \right)_F = \left(\frac{d\mathbf{u}_R}{dt} \right)_R + 2\Omega \times \mathbf{u}_R + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + \cancel{\frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{r}} = 0$$

Προσέγγιση για
γεωφυσικά ρευστά

**Coriolis
acceleration**

small term
(correction in \mathbf{g})

$$x \rightarrow -2\Omega \sin(\varphi) v + 2\Omega \cos(\varphi) w$$

$$g_{\text{effective}} \simeq -g + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$$

$$y \rightarrow 2\Omega \sin(\varphi) u$$

$$z \rightarrow -2\Omega \cos(\varphi) u$$

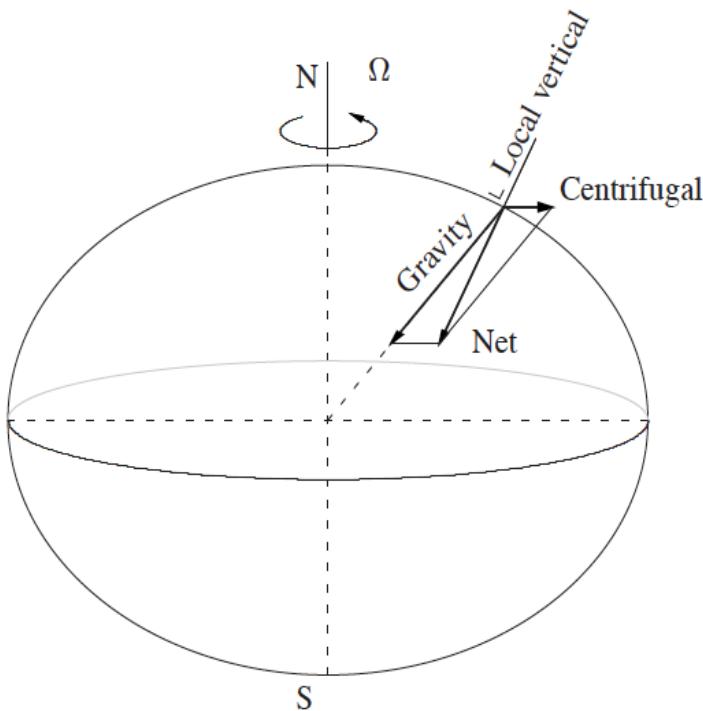
$$f = 2\Omega \sin(\varphi)$$

The β term

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial y} \simeq \frac{\partial f}{R_{\text{earth}} \partial \varphi} =$$

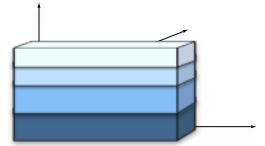
$$= \frac{\partial (2\Omega \sin(\varphi))}{R_{\text{earth}} \partial \varphi} = \frac{2\Omega \cos(\varphi)}{R_{\text{earth}}}$$

(for small changes in φ : $\sin(\varphi) \simeq \varphi$)



- Δεν υπάρχει επιτάχυνση Coriolis σε ακίνητα σώματα
- Στα γεωφυσικά ρευστά επικρατεί η οριζόντια εκτροπή (δεξιά ή αριστερά).
- Η δύναμη Coriolis δεν παράγει έργο (κάθετη στην κίνηση)..

iii. Η επίδραση της στρωμάτωσης



Αν παρουσιάζεται μεταβολή πυκνότητας $\Delta\rho$ σε κατακόρυφη κλίμακα H , σε ένα στοιχειώδη όγκο ρευστού που μετακινείται κατά H αλλάζει η δυναμική του ενέργεια κατά $(\rho_0 + \Delta\rho) g H - \rho_0 g H = \Delta\rho g H$. Για τυπική ταχύτητα U του ρευστού, η κινητική ενέργεια στη μονάδα του όγκου είναι $\frac{1}{2}\rho_0 U^2$. Ο λόγος των δύο

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}\rho_0 U^2}{\Delta\rho g H}$$

παρουσιάζει τις παρακάτω περιπτώσεις:

$\sigma \sim 1$: Οι δύο μορφές ενέργειας είναι εξίσου σημαντικές και για σημαντικές μεταβολές της δυναμικής ενέργειας θα καταναλωθεί σημαντική ποσότητα κινητικής ενέργειας (**η στρωμάτωση είναι σημαντική**).

$\sigma < 1$: Δεν υπάρχει αρκετή κινητική ενέργεια για μεταβάλει τη δυναμική ενέργεια (**η ροή περιορίζεται από τη στρωμάτωση**).

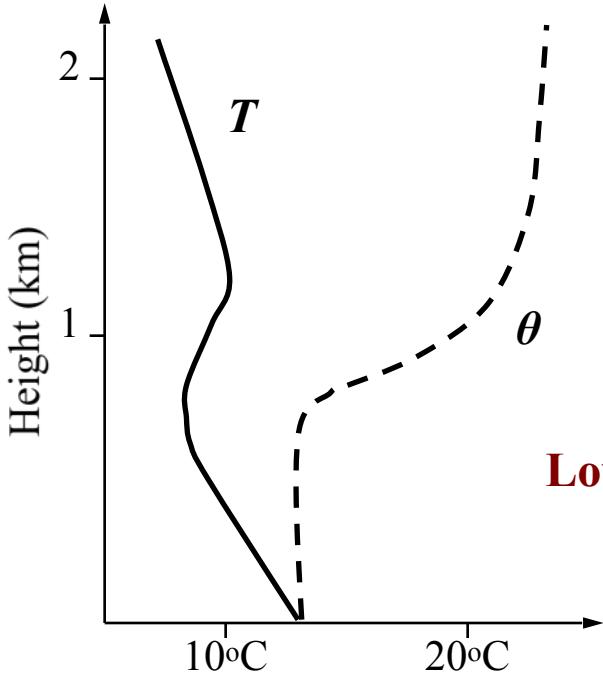
$\sigma > 1$: Μεταβολές στη δυναμική ενέργεια επέρχονται με μικρές απώλειες κινητικής ενέργειας (**η στρωμάτωση δεν παίζει σημαντικό ρόλο**).

Άρα γενικά η στρωμάτωση παίζει σημαντικό ρόλο για: $\sigma \leq 1$

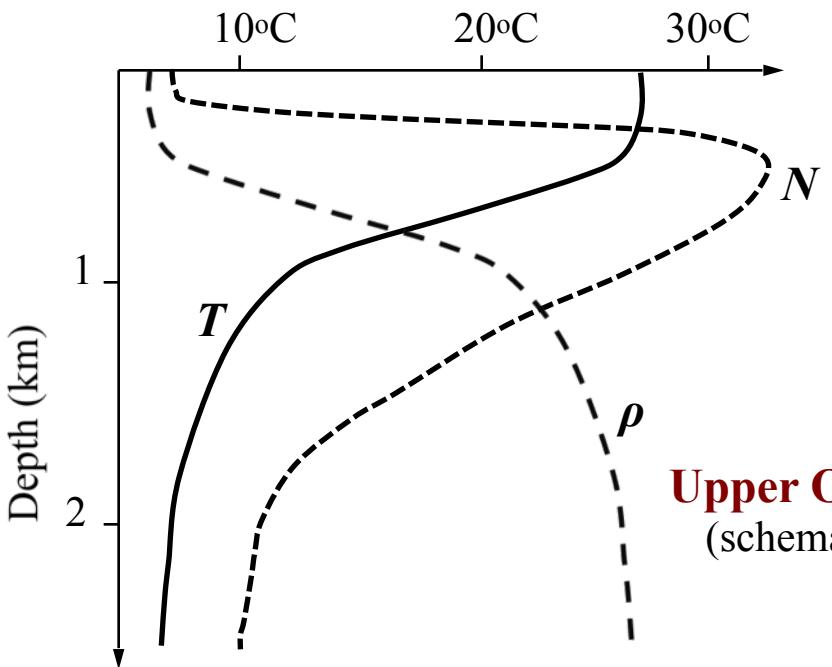
(π.χ. για ταχύτητα ρεύματος 0.1 m s^{-1} και μεταβολές πυκνότητας 1 kg m^{-3} σε βάθος 100 m : $\sigma \sim 10^{-2}$)



Vilho Väisälä



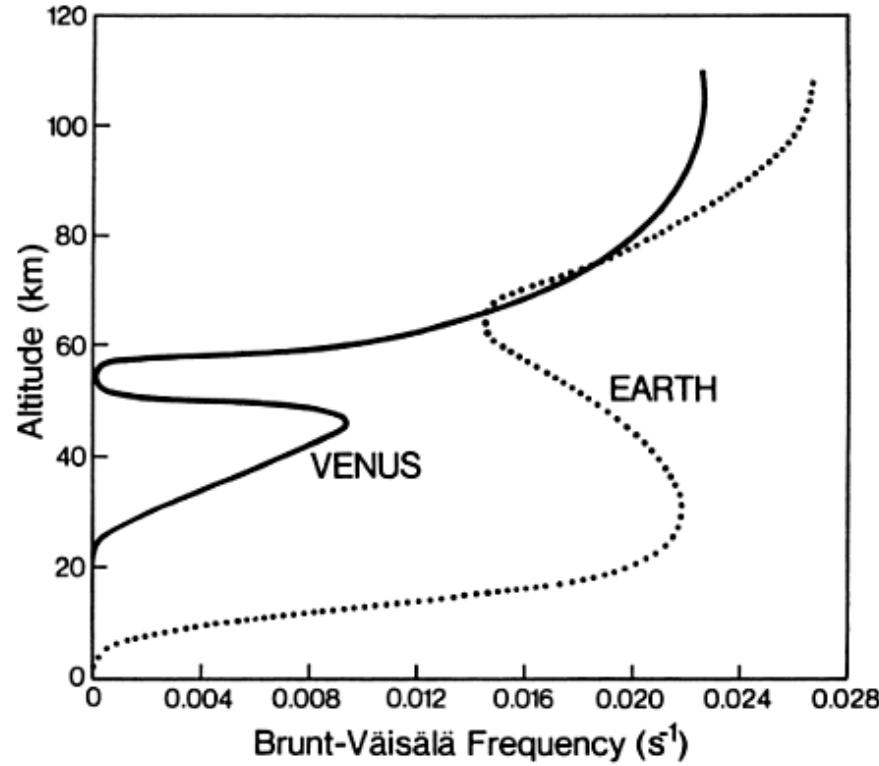
Lower Atmosphere
(schematic)



Upper Ocean
(schematic)

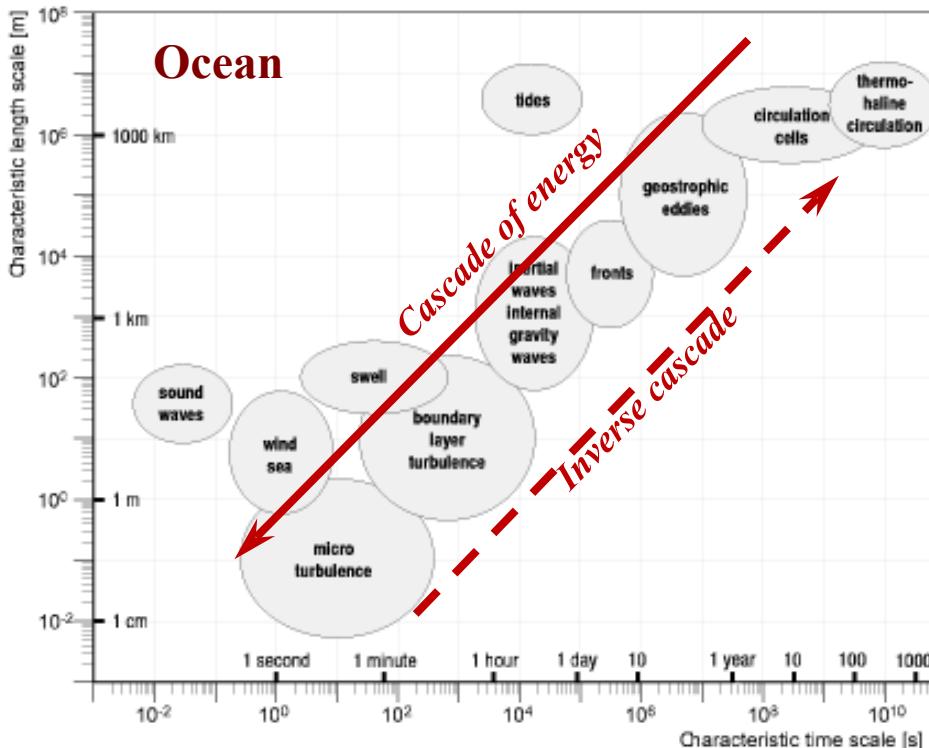
Η ένταση της στρωμάτωσης καθορίζεται από την κατανομή της πυκνότητας κατά βάθος $\rho(z)$. Συνήθως εκφράζεται με τη συχνότητα Brunt Väisälä (N σε s^{-1}), που δίνεται από τη σχέση

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z}}$$



N (smoothed) for Earth and Venus (temperature-static stability data from Pioneer Venus Large probe (Seiff et. Al. 1980) From Venus: Hunten et al., eds., 1983, The University of Arizona Press

Ocean

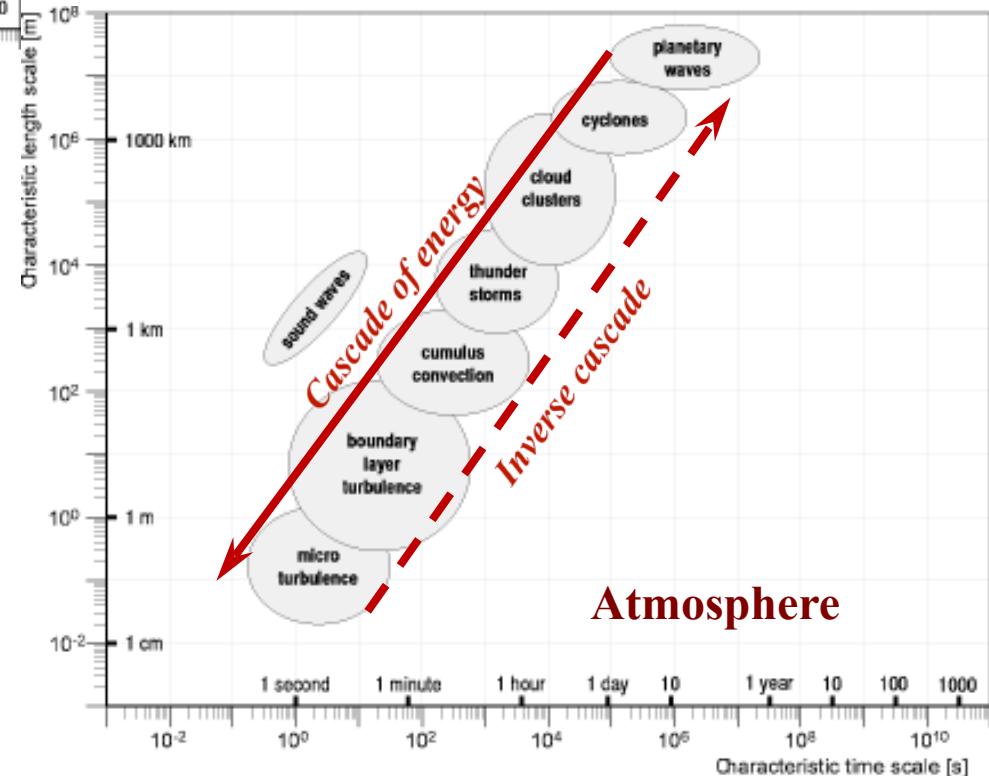


Phenomenon	Length Scale <i>L</i>	Velocity Scale <i>U</i>	Time Scale <i>T</i>
<i>Ocean:</i>			
Microturbulence	1–100 cm	1–10 cm/s	10–100 s
Internal waves	1–20 km	0.05–0.5 m/s	Minutes to hours
Tides	Basin scale	1–100 m/s	Hours
Coastal upwelling	1–10 km	0.1–1 m/s	Several days
Fronts	1–20 km	0.5–5 m/s	Few days
Eddies	5–100 km	0.1–1 m/s	Days to weeks
Major currents	50–500 km	0.5–2 m/s	Weeks to seasons
Large-scale gyres	Basin scale	0.01–0.1 m/s	Decades and beyond

Phenomenon	Length Scale <i>L</i>	Velocity Scale <i>U</i>	Time Scale <i>T</i>
------------	--------------------------	----------------------------	------------------------

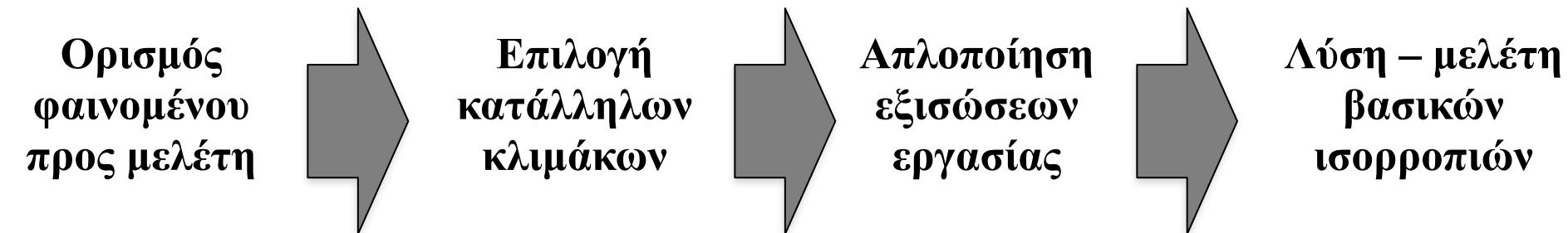
Atmosphere:

Microturbulence	10–100 cm	5–50 cm/s	few seconds
Thunderstorms	few km	1–10 m/s	few hours
Sea breeze	5–50 km	1–10 m/s	6 hours
Tornado	10–500 m	30–100 m/s	10–60 minutes
Hurricane	300–500 km	30–60 m/s	Days to weeks
Mountain waves	10–100 km	1–20 m/s	Days
Weather patterns	100–5000 km	1–50 m/s	Days to weeks
Pervading winds	Global	5–50 m/s	Seasons to years
Climatic variations	Global	1–50 m/s	Decades and beyond



Atmosphere

Γ. Ανάλυση κλίμακας - Scaling



Οι βασικές εξισώσεις περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό διαδικασιών (από μοριακή κλίμακα μέχρι παγκόσμια κλίμακα). Ανάλογα με το φαινόμενο που θέλουμε να μελετήσουμε, μπορούμε να επιλέξουμε τις κατάλληλες κλίμακες για αυτό το φαινόμενο.

$$u, v \rightarrow U \quad x, y \rightarrow L$$

$$f \rightarrow f(y)$$

$$w \rightarrow W \quad z \rightarrow H$$

$$\rho \rightarrow \rho_0$$

$$t \rightarrow T \sim \frac{L}{U} \sim \frac{H}{W}$$

$$\partial\rho \rightarrow \Delta\rho$$

$$g \rightarrow g$$

...

Goal: Estimation of the relative importance of each term in the process under investigation and the possibility to simplify the basic equation by defining a dominant balance of the dynamics/ thermodynamics involved.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

SCALING

$$\frac{U}{T} \sim \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{UW}{H} \quad \frac{\Delta P}{\rho L} \quad fU \quad \nu \frac{U}{L^2} \quad \nu \frac{U}{L^2} \quad \nu \frac{U}{H^2}$$

Scaling numbers:

Non-linear

Geometrically similar

These number characterise the fluid dynamics

Viscous

Diffusive

Bounded

aspect ratio $\rightarrow \delta = \frac{H}{L}$

Rossby number $\rightarrow Ro = \frac{\text{non-linear}}{\text{coriolis}} = \frac{U^2}{L} \frac{1}{fU} = \frac{U}{fL}$

Ekman number $\rightarrow Ek = \frac{\text{viscosity}}{\text{coriolis}} = \nu \frac{U}{L^2} \frac{1}{fU} = \frac{\nu}{fL^2}$ or $\frac{\nu}{fH^2}$

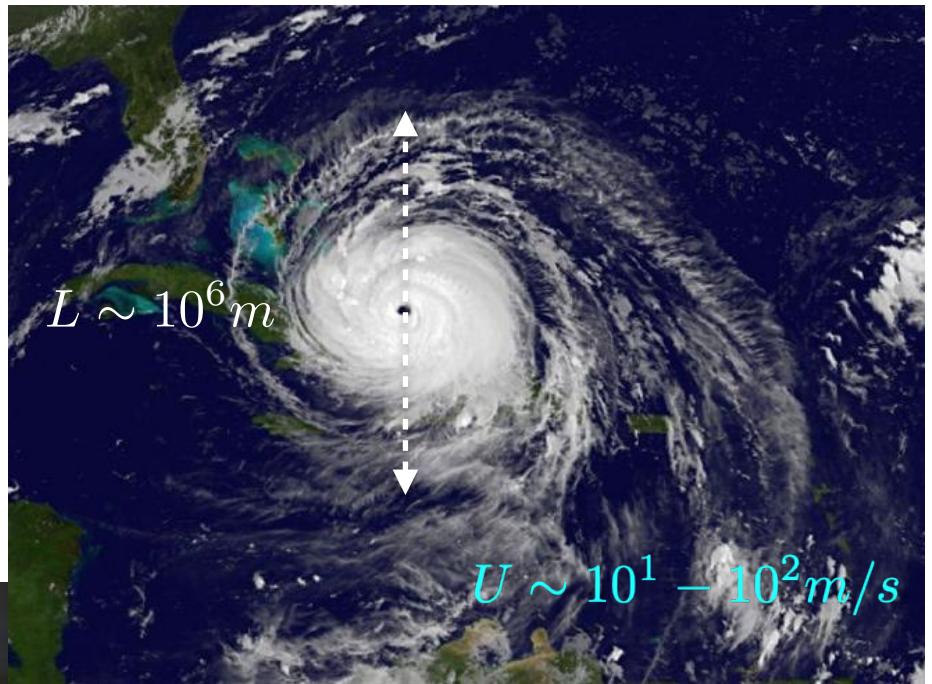
Reynolds number $\rightarrow Re = \frac{\text{non-linear}}{\text{viscosity}} = \frac{U^2}{L} \frac{1}{\nu} = \frac{UL}{\nu} \frac{U}{L^2}$

and many more combinations ...

$$\nu_{atmospher} \sim 10^{-5} m^2/s$$

$$\nu_{ocean} \sim 10^{-6} m^2/s$$

$$T \sim \frac{L}{U}$$



A satellite image of a large, well-defined hurricane with a clear eye. A vertical dashed line with arrows at both ends spans the width of the storm's eye wall, indicating its horizontal scale.

$$L \sim 10^6 m$$



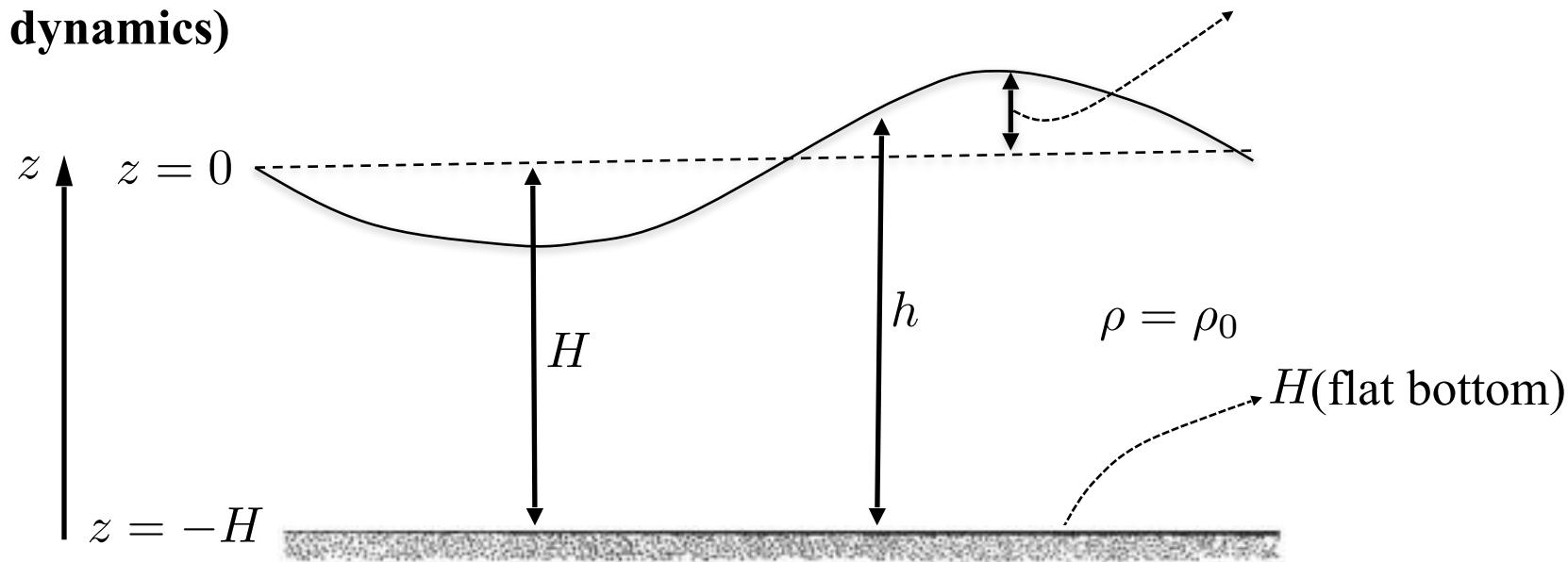
$$U \sim 10^2 m/s$$

$$f_{earth} \sim 10^{-4} s^{-1} (Day = 24 hours)$$

$$f_{jupiter} \sim 10^{-4} s^{-1} (Day \simeq 10 hours)$$

Εξισώσεις εργασίας (Single-shallow layer dynamics)

η (free surface)



$$\frac{dw}{dt} \sim \frac{W}{T} \sim \frac{WU}{L} \sim \frac{U \frac{H}{L} U}{L} \sim \frac{U^2 H}{L^2} \sim \frac{U^2 H H}{L^2 H} \sim \frac{U^2 H^2}{H L^2}$$

$$\frac{dw}{g} \sim \frac{U^2 H^2}{g H L^2} = \frac{U^2 H^2}{g H L^2} = F_R^2 \delta_\alpha^2 \ll 1$$

hydrostatic approximation holds

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g$$

$$\Rightarrow dp = -\rho_0 g dz \Rightarrow \int_z^\eta dp = - \int_z^\eta \rho_0 g dz \Rightarrow p(\eta) - p(z) = -\rho_0 g(\eta - z)$$

$$\Rightarrow p = \rho_0 g (\eta(x, y) - z) + p_{atm}$$

$$\Rightarrow \nabla_H p = \rho_0 g \nabla_H \eta$$

$$\delta_\alpha = \frac{H}{L} < 1$$

$$F_R = \frac{U}{\sqrt{gH}} < 1^*$$

Ξεκινώντας από

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

αντικαθιστώντας

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + fv + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - fu + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Εξισώσεις διατήρησης της ορμής

Τώρα $\eta = f(x, y)$ ανεξάρτητο από το z και άρα οι ταχύτητες u και v είναι ανεξάρτητες από το z , δηλ. $(u, v) = f(x, y, t)$.

Εξίσωση διατήρησης της μάζας

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ where } u, v \propto x, y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^{\eta} u \ dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^{\eta} v \ dz + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-H}^{\eta} w \ dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [u(\eta + H)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(\eta + H)] + w(\eta) - w(H) = 0$$

but: $w(H) = 0$, $w(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\eta \ll H$

$$\Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

**Shallow-water
equations
(single layer model)**

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + fv + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - fu + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Vorticity (στροβιλισμός)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + fv \quad (1)$$

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - fu \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2) - \frac{\partial}{\partial y}(1)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \\
& - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = \\
& = -g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - f \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial f}{\partial y} \xrightarrow{=} \frac{df}{dt}
\end{aligned}$$

$(u, v \not\propto z)$
 $f \not\propto x$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\
 & = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{df}{dt} \\
 & = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)
 \end{aligned}
 \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \quad = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Defining **relative vorticity**: $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta$ (ocean velocity curl)

$$R_o = \frac{U}{fL} \ll 1$$

using (3):

$$h \frac{d}{dt} (f + \zeta) - (f + \zeta) \frac{dh}{dt} = 0 \quad \text{or}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f + \zeta}{h} \right) = 0$$

Potential Vorticity (δυναμικός στροβιλισμός)

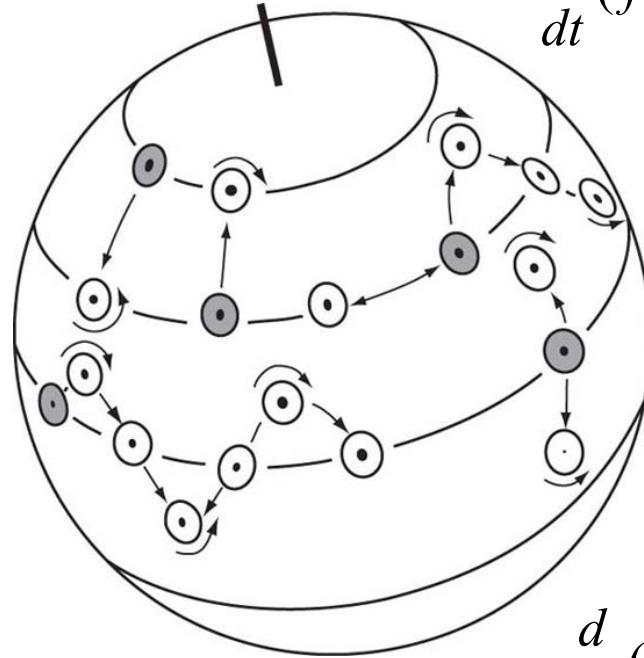
*Earth's
rotation*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f + \zeta}{h} \right) = 0$$

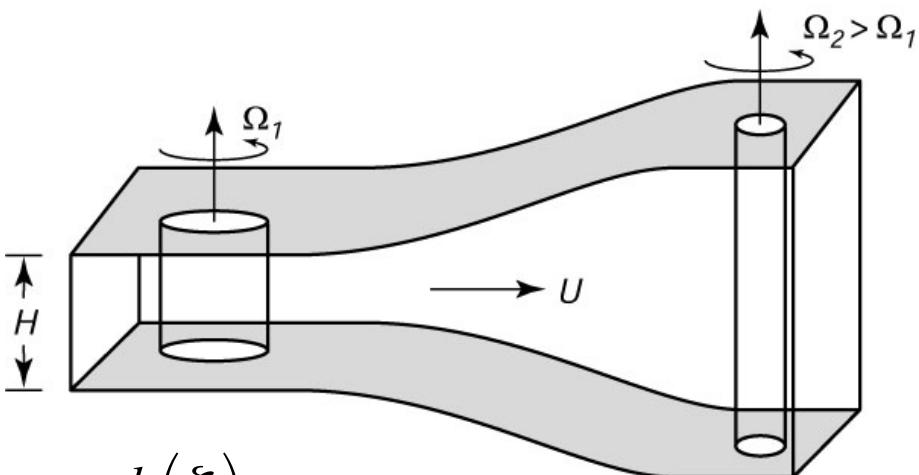
Spinning

Stretching

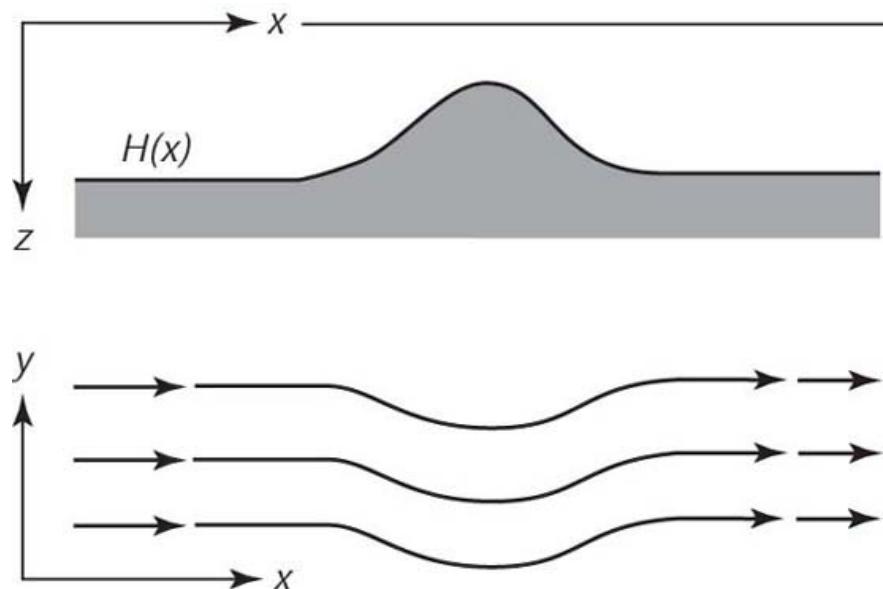
$$\frac{d}{dt} (f + \zeta) = 0$$



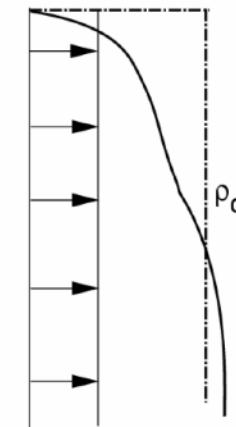
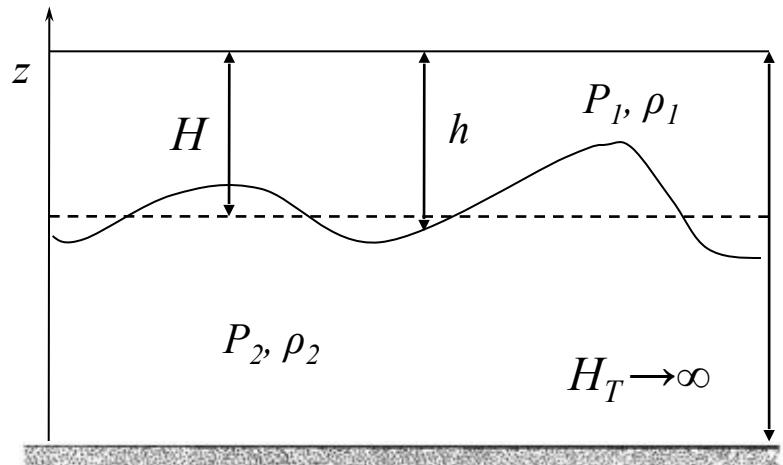
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f + \zeta}{H} \right) = 0$$



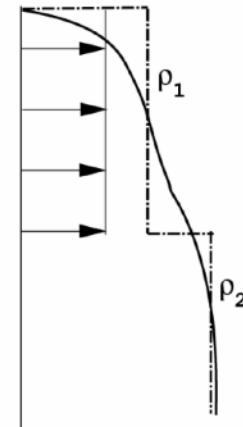
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta}{h} \right) = 0$$



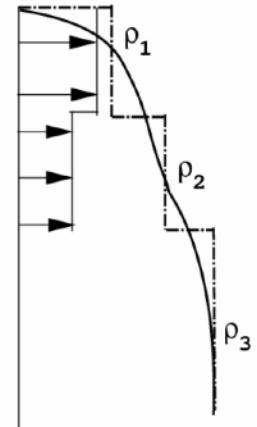
Μοντέλα στρωμάτων (Reduced gravity models)



Homogeneous



$\left(1\frac{1}{2}\right)$ layers



$\left(2\frac{1}{2}\right)$ layers

$$P_1 = P_a - \rho_1 g z \text{ and } P_2 = P_a + \rho_1 g h - \rho_2 g (z + h)$$

$$\nabla_H P_2 = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_H P_a + \rho_1 g \nabla_H h - \rho_2 g \nabla_H h = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_H P_a = (\rho_2 - \rho_1) g \nabla_H h$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_0} \nabla_H P_1 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_0} g \nabla_H h = g' \nabla_H h$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -g' \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -g' \frac{\partial h}{\partial y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ where } u, v \propto x, y$$

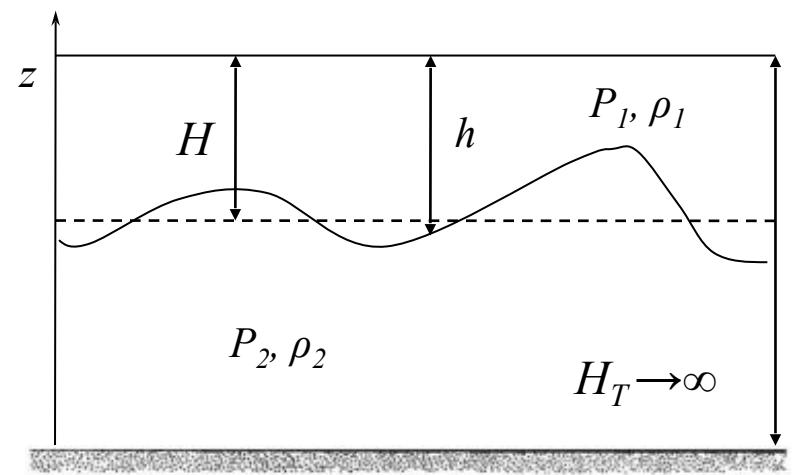
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^0 v \, dz + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-h}^0 w \, dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (uH) + \frac{\partial}{\partial y} (vh) + w(0) - w(-h) = 0$$

but: $w(0) = 0, w(-h) = \frac{\partial h}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) = 0$$

$$g' = g \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g' \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g' \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) = 0$$

**Reduced gravity
equations**

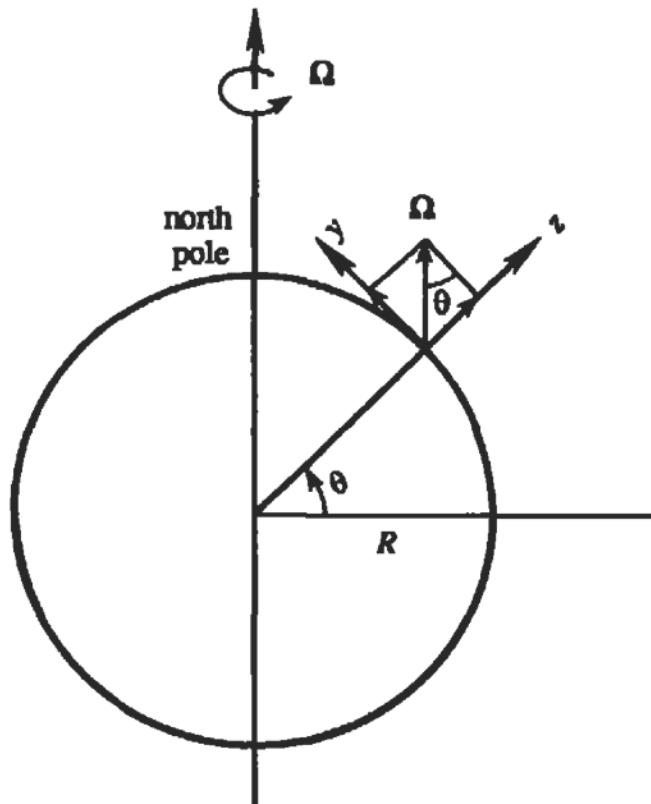
Τώρα μπορούμε να γράψουμε τη συχνότητα Brunt Vaissala:

$$N^2 = - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \sim \frac{g}{\rho_0} \frac{\Delta \rho}{H} = \frac{g'}{H}$$

Kαι η Internal Rossby Radius of deformation:

$$R = \frac{NH}{f} = \frac{\sqrt{g'H}}{f} \longrightarrow (\text{small } H)$$

Appendix 1.



$$\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) = (0, \Omega \cos \theta, \Omega \sin \theta)$$

$$\begin{aligned}
 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2\Omega \cos \theta & 2\Omega \sin \theta \\ u & v & w \end{vmatrix} \\
 &= 2\Omega[\mathbf{i}(w \cos \theta - v \sin \theta) + \mathbf{j}u \sin \theta - \mathbf{k}u \cos \theta]
 \end{aligned}$$