Ενοτητα 3

28/09/22
(1º Μαθημα)

Διαδικασια Poisson
Ανανεωτικη Διαδικασια
Μ.Α.Δ.Χ
Μ.Α.Σ.Χ
Martingales

Βιβλιογραφια:
Modeling and Analysis of Stochastic Processes
Stochastic Processes Ross

Ασκησεις (2/10)

Ενοτητα 1: Διαδικασια Poisson

1.1 Εκθετικη Κατανομη

$X \sim Exp(\lambda)$

σ.π.π $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$

συναρτηση κατανομης (σ.κ)

- Αν $x<0$ $F_X(x) = P(X \leq x)$

$\Downarrow$

$F_X(x) = 0$

- Αν $x>0$ $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f_X(x)\,dx$

$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} - (-1) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Συναρτηση Επιβιωσης (σ.ε)

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) = 1 - P(X \leq x) =$$
$$= P(X > x)$$

(Πιθ. να επιβιωσει τουλ. x χρονικες μονάδες)

$$= \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Ασκηση

Εστω X = χρόνος μεχρι την αφιξη λεωφορειου σε ~~min~~ ωρες

$X \sim Exp(\lambda)$
$\lambda = 5$

(i) Ποια η μοναδα μετρησης του λ;
(ii) Ποια η ερμηνεια του;

Λυση: (i) $E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}$ ωρας

$\lambda = 5$ 1/ώρες

$E[X] \rightarrow$ περιοδος
$\lambda \rightarrow$ συχνότητα

Ρυθμός Βλάβης (hazard rate / failure rate)

Έστω $X \geq 0$ συνεχής τμ με σπη $f_X(x)$ σκ $F_X(x)$, σε $\bar{F}_X(x)$. Τότε η συνάρτηση $r(x) = \dfrac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)}$, $x \geq 0$

ονομάζεται ρυθμός βλάβης

Τι είναι ο ρυθμός βλάβης στο X χρόνος ζωής μηχανής;

$$P(x < X \leq x+h \mid X > x)$$

Δεσμεύω ότι δεν έχει χαλάσει μέχρι τη στιγμή x
Πιθανότητα να χαλάσει στο $(x, x+h]$

$$= \frac{P(x < X \leq x+h, X > x)}{P(X > x)}$$

$$= \frac{P(x < X \leq x+h)}{P(X > x)}$$

$$= \frac{f_X(x) \cdot h + o(h)}{\bar{F}_X(x)} \quad (\text{όπου } o(h) \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0)$$

$$= \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)} \cdot h + o(h)$$

Scanned with CamScanner

$= r(x)h + o(h)$

Άρα για $h \to 0^+$, το $r(x)h$ δινει τη δεσμευμενη πιθανοτητα να χαλασει η μηχανή στο επομενο διαστημα μηκους h, δεδομενου οτι δεν εχει χαλασει μεχρι τη x.

(Αποδ σε ασκ) * Θεώρημα: Μια συνεχης μη-αρνητικη τμ εχει σταθερο ρυθμο βλαβης, $r(x) = \lambda$, $x \geq 0$ ανν ακολουθει την εκθετικη κατανομη με ρυθμό λ.

Αμνημονη ιδιότητα

Μια τμ $X \geq 0$ εχει την αμνημονη ιδιότητα αν

$$P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s) \quad \forall t, s \geq 0$$

Αν X χρονος ζωης μηχανης, η αμνημονη ιδιοτητα λεει οτι η δεσμευμενη πιθανοτητα η μηχανη να λειτουργησει για s χρονικες μοναδες ακομη, δεδομενου οτι εχει ηδη λειτουργησει t μοναδες ειναι ιση με την πιθανοτητα να λειτουργησει τουλ x χρον. μοναδες ενω ειναι καινουργια.

[Μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes τυχαίας μεταβλητής]

Εστω X συνεχης μη-αρνητικη τμ με σ.π.π $f_X(x)$. Ο μετασχηματισμος Laplace - Stieljes (LST) της X είναι $\tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}]$

Ιδιότητες: • Χαρακτηρίζει την κατανομή

$$\bullet\ E[X^r] = (-1)^r \left[\frac{d^r \tilde{F}_X(s)}{ds^r}\right]_{s=0}$$

• X_1, X_2 ανεξάρτητες τμ

τοτε $\tilde{F}_{X_1+X_2}(s) = E[e^{-s(X_1+X_2)}]$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} E[e^{-sX_1}]\,E[e^{-sX_2}]$$

$$= \tilde{F}_{X_1}(s)\,\tilde{F}_{X_2}(s)$$

Μετασχηματισμος Laplace - Stieltjes

$$\hat{F}_X(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)\,dx$$

(Αφηρημένου Στατιστικού)

$$= \int_0^\infty e^{-sx}\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x}\,dx$$

$$= \lambda \left[\frac{e^{-(\lambda+s)x}}{-(\lambda+s)}\right]_0^\infty \overset{\lambda+s>0}{=}$$

Scanned with CamScanner

$$\lambda\left[0-\frac{1}{(\lambda+s)}\right]=\frac{\lambda}{\lambda+s}, \quad s>\lambda$$

$\rightarrow E[X^r]$

$$E[X^r]=(-1)^r\left[\frac{d^r\tilde{F}_X(s)}{ds^r}\right]_{s=0}$$

$$\frac{d\tilde{F}_X(s)}{ds}=\left(\lambda(\lambda+s)^{-1}\right)'=$$

$$=-1\lambda(\lambda+s)^{-2}$$

$$\frac{d^2\tilde{F}_X(s)}{ds^2}=\left(-1\lambda(\lambda+s)^{2}\right)'=$$

$$=1\cdot 2\lambda(\lambda+s)^{-3}$$

$$\frac{d^3\tilde{F}_X(s)}{ds^3}=-1\cdot 2\cdot 3\lambda(\lambda+s)^{-4}$$

Επαγωγικά δ.ο

$$\frac{d^r\tilde{F}_X(s)}{ds^r}=(-1)^r\cdot r!\,\lambda(\lambda+s)^{-(r+1)}$$

$$E[X^r]=(-1)^r\left[\frac{d^r\tilde{F}_X(s)}{ds^r}\right]_{s=0}$$

$$=(-1)^r(-1)^r r!\,\lambda\cdot\lambda^{-(r+1)}=\frac{r!}{\lambda^r}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad E[X^2] = \frac{2!}{\lambda^2} \quad Var[X] =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$CV[X] = \frac{\sqrt{Var[X]}}{E[X]} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = 1$$

(δεν εξαρταται απο το λ)

Θεωρημα: Μια συνεχης $X \geq 0$ τμ εχει την αμνημονη ιδιοτητα ανν ακολουθει την εκθετικη κατανομη.

Αποδ: $P(X > t+s \mid X > t) = \dfrac{P(X > t+s, X > t)}{P(X > t)}$

$X \sim Exp(\lambda)$

$$= \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

$$= P(X > s)$$

Ελάχιστο Εκθετικων, Πιθανοτητα $1^{ης}$ βλαβης

Ανεξαρτησια

Εστω $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$ χρονος ζωης μηχ 1
$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$ " " 2

X_1, X_2 ανεξαρτητες

$Z = \min\{X_1, X_2\}$
(χρονος μεχρι να χαλασει η $1^η$.

$$I = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_1 < X_2 \\ 2, & X_1 > X_2 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

1) $Z \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1+\lambda_2)$

2) $P(I=1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ και $P(Z=2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$

3) Z, I ανεξάρτητες

Αποδ:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\min\{X_1,X_2\} \leq z)$$

$$= 1 - P(\min\{X_1, X_2\} > z)$$

$$= 1 - P(X_1 > z, X_2 > z)$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} 1 - P(X_1 > z) P(X_2 > z)$$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 z} e^{-\lambda_2 z} = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2) z}$$

$$Z \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1+\lambda_2)$$

2) $P(I=1) = P(X_1 < X_2) = \int_0^{\infty} \underbrace{P(X_1 < X_2 \mid X_2 = x)}_{P(X_1<x)} f_{X_2}(x)\,dx$

$$\left[P(A) = \begin{cases} \sum_x P(A \mid X=x) \cdot P(X=x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_x P(A \mid X=x) \cdot f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases} \right.$$

$$E[Z] \overset{\text{Θ.Δ.Μ.Τ}}{=} E\big[E[Z \mid X]\big] = \begin{cases} \sum_x E[Z \mid X=x] P[X=x], & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} E[Z \mid X=x] f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

δεσμεύω ως προς τη X_1 αντί για X_2

$$= \int_0^{\infty} P(X_2 > x) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 x} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} = \lambda_1 \left[\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}}{-(\lambda_1+\lambda_2)} \right]_0^{\infty}$$

$$= \lambda_1 \left(0 - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Άρα $P(I=2) = P(X_2 < X_1) = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda}$

03/10/22 (2º Μάθημα)

$X_1 \sim Exp(\lambda_1)$
$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

X_1, X_2 ανεξάρτητες
$Z = \min\{X_1, X_2\}$

$$I = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_1 < X_2 \\ 2, & \text{αν } X_2 < X_1 \end{cases}$$

Z, I ανεξάρτητες

Αποδ: Αρκεί νδο $P(I=i, Z > z)$, $i \in \{1,2\}$, $z \geq$
$= P(I=i) P(Z > z)$.

$$P(I=1, Z > z) = P(X_1 < X_2, \min\{X_1, X_2$$
$$= P(X_1 < X_2, X_1 > z) =$$
$$= P(X_2 > X_1 > z)$$

Scanned with CamScanner

$$= \int_0^\infty P(X_2 > X_1 > z \mid X_1 = x) F_{X_1}(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty P(X_2 > x > z)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx$$

$$= \int_z^\infty \underbrace{P(X_2 > x)}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx = \int_z^\infty e^{-\lambda_2 x}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx$$

$$= \lambda_1 \int_z^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\,dx$$

$$= \lambda_1 \left[\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}}{-(\lambda_1+\lambda_2)}\right]_z^\infty$$

$$= \lambda_1\left(0 + \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}}_{P(I=1)} \underbrace{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}}_{P(Z>z)}$$

Ομοίως μπορούμε νδο

$$P(I=2, Z>z) = P(I=2)P(Z>z)$$

Παρατηρήσεις:

1) Τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν και για περισσότερες ανεξάρτητες και εκθετικές κατανεμημένες τμ

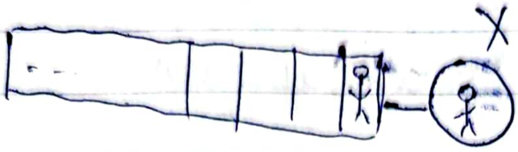
2) Η τελευταία ιδιότητα είναι βασική για τη

μελέτη των ΜΑΣΧ

Εφαρμογες

1) Συστημα εξυπηρετησης

$X \sim Exp(0.2)$



Όταν ο $2^{ος}$ πελατης εισερχεται ο πρωτος εχει συμπληρωσει 3' εξυπηρετ.

$$E\left[\begin{array}{c}\text{Ο μεσος χρονος αναμονης} \\ \text{του } 2^{ου} \text{ πελάτη}\end{array}\right]$$

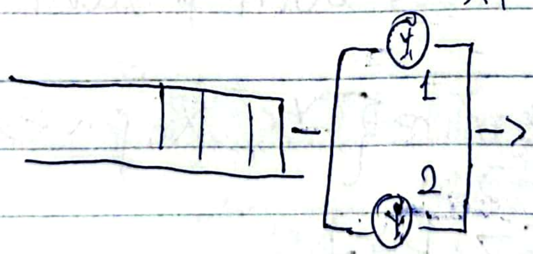
$$= E\left[\begin{array}{c}\text{υπολειπομενος χρονος εξυπηρ.} \\ \text{του } 1^{ου}\end{array} \middle| \begin{array}{c}\text{εχει συμπληρ.} \\ \text{3' εξυπηρ.}\end{array}\right]$$

αμνημονης ιδιοτ. Exp.

$$= E\left[\begin{array}{c}\text{χρονος εξυπ.} \\ \text{του } 1^{ου}\end{array}\right] = \frac{1}{0.2} = 5'$$

2) Συστημα Εξυπηρετησης

$X_1 \sim Exp(3)$



$X_2 \sim Exp(1)$

Όταν ο πελάτης 1 εισερχεται στο σύστημα, ο πελάτης 2 εχει συμπληρωσει 20'' εξυπηρέτησης. λογω αμνημοσυνης

$$P\left(\begin{array}{c}\text{ο πελατης 1} \\ \text{να εξυπηρ πριν} \\ \text{απο τον πελατη 2}\end{array}\right) = \frac{3}{3+1} = 0{,}75$$

3) Σύστημα που αποτελείται από n συσκευές παράλληλα συνδεδεμένες.
Το σύστημα λειτουργεί αν τουλ μια λειτουργεί

X_i = χρόνος συσκευής $i \sim Exp(\lambda)$, $i=1,\dots n$

$X_1, X_2, \dots X_n$ ανεξάρτητοι

Z = χρόνος ζωής συστήματος =

$= \max\{X_1, \dots X_n\}$

$E[Z] = ;$

$\underset{Exp(n\lambda)}{Z_1} \quad Z_2 \quad Z_3 \quad \sim Exp((n-2)\lambda) \quad Z = Z_n$

Z_i = χρόνος μέχρι να χαλάσει η i-οστή μηχανή

$$Z_1 = \min\{X_1, \dots X_n\} \sim Exp(n\lambda)$$

$$E[Z_1] = \frac{1}{n\lambda}$$

$$Z_2 - Z_1 \simeq \min\{X_1, \dots X_{n-1}\} \sim Exp((n-1)\lambda)$$

$$E[Z_2 - Z_1] = \frac{1}{(n-1)\lambda}$$

Γενικά, $E[Z_{i+1} - Z_i] = \frac{1}{(n-i)\lambda}$ $\quad i = 1, \dots n-1$

Scanned with CamScanner

$$Z = Z_1 + (Z_2 - Z_1) + (Z_3 - Z_2) + \dots + (Z_n - Z_{n-1})$$

$$E[Z] = E[Z_1] + E[Z_2 - Z_1] + \dots + E[Z_n - Z_{n-1}]$$

$$\Rightarrow E[Z] = \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{(n-1)\lambda} + \frac{1}{(n-2)\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j\lambda}$$

Ισχυρή Αμνήμονη Ιδιότητα

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Exp(\lambda) \\ T \geq 0 \text{ συνεχής} \\ X, T \text{ ανεξ} \end{array}\right\} \Rightarrow P(X > T+s \mid X > T) = P(X > s) = e^{-\lambda s} \qquad s \geq 0$$

Αποδ: $P(X > T+s \mid X > T) = \dfrac{P(X > T+s, X > T)}{P(X > T)}$

$$= P(X > T+s) =$$

$$= \int_0^\infty P(X > T+s \mid T = t) f_T(t)\, dt$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} \int_0^\infty P(X > t+s) f_T(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda(t+s)} f_T(t)\, dt$$

$$= e^{-\lambda s} \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda t} f_T(t)\, dt$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{\int_0^\infty P(X > t) f_T(t)\, dt}{P(X > T)}$$

$$= e^{-\lambda s} P(X > T)$$

Οπότε, $P(X > T+s \mid X > T) = \dfrac{e^{-\lambda s} \cancel{P(X > T)}}{\cancel{P(X > T)}}$

$$= e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

Erlang(n, λ) $\quad n = 1, 2, \dots \quad \lambda > 0$

Εστω $Z \sim$ Erlang(n, λ)

σ.π.π $\quad f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda z} \cdot z^{n-1}, & z \geq 0 \end{cases}$

σ.κ $\quad F_Z(z) = P(Z \leq z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \displaystyle\int_0^z \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} du & z \geq 0 \end{cases}$

$$\left(\int_0^z f_Z(u) \right)$$

μετασχηματισμος LS

$$\tilde{F}_Z(s) = E[e^{-sZ}] = \int_0^\infty e^{-sz} f_Z(z) dz$$

$$= \int_0^\infty e^{-sz} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\lambda z} dz$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \frac{(\lambda+s)^n}{(\lambda+s)^n} \underbrace{z^{n-1} e^{-(\lambda+s)z}}_{\text{σ.π.π Erlang}(n, \lambda+s)} dz$$

Scanned with CamScanner

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$$

Άθροισμα ανεξαρτητων και ισονομων $Exp(\lambda)$

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_n \sim Exp(\lambda) \\ X_1, X_2, \dots X_n \text{ ανεξ} \\ Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n \end{array}\right\} \Rightarrow Z \sim Erlang(n, \lambda)$$

Αποδ: $Z = X_1 + \dots + X_n$

$$\tilde{F}_Z(s) = E[e^{-sZ}] = E[e^{-s(X_1 + \dots + X_n)}]$$

$$= E[e^{-sX_1} e^{-sX_2} \dots e^{-sX_n}] \overset{\text{ανεξ}}{=}$$

$$= E[e^{-sX_1}] E[e^{-sX_2}] \dots E[e^{-sX_n}]$$

$$= \tilde{F}_{X_1}(s) \dots \tilde{F}_{X_n}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$$

$$\Rightarrow Z \sim Erlang(n, \lambda)$$

Τυχαιο άθροισμα ανεξαρτητων κ' ισονομων $Exp(\lambda)$

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ κ' ισονομων $Exp(\lambda)$

$N \sim Geom(p)$

$N = \#$ δοκιμών μεχρι την 1^{η} επιτυχια σε δοκιμές Bernoulli με πιθ επιτυχίας p.

$$P(N=n) = (1-p)^{n-1} p \quad , \; n=1,2\ldots$$

Έστω $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ ← τυχαίο άθροισμα

Ισχύει $Z \sim Exp(\lambda p)$

Αποδ: $\tilde{F}_Z(s) = E[e^{-sZ}] = E[e^{-s\sum_{i=1}^{N} X_i}]$

$$= E[e^{-s(X_1 + \ldots + X_N)}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[e^{-s(X_1+\ldots+X_N)} | N=n] P[N=n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[e^{-s\underbrace{(X_1+\ldots+X_n)}_{Erlang(n\lambda)}}] \cdot (1-p)^{n-1} p$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n (1-p)^{n-1} p$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+s} \cdot p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}(1-p)\right)^{n-1}$$

$n' = n-1$

$$= \frac{\lambda p}{\lambda+s} \sum_{n'=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda(1-p)}{\lambda+s}\right)^{n'}$$

$* \; \frac{\lambda(1-p)}{\lambda+s} < 1 \Rightarrow$

$\lambda(1-p) < \lambda + s$

$\Rightarrow \; -\lambda p < s$

$$\overset{*}{=} \frac{\lambda p}{\lambda+s} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda(1-p)}{\lambda+s}} = \frac{\lambda p}{\lambda+s} \frac{\lambda+s}{\lambda p+s} = \frac{\lambda p}{\lambda p+s}, \quad s > -\lambda p$$

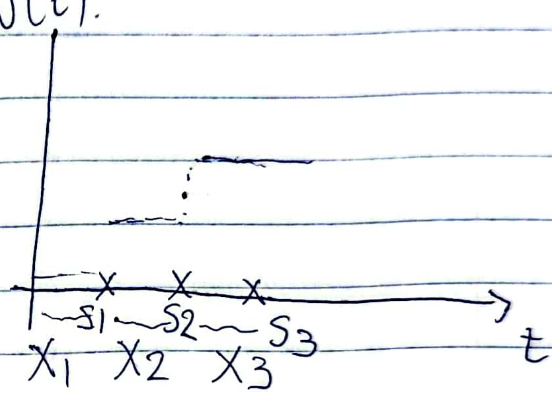
Scanned with CamScanner

$Z \sim Exp(\lambda_p)$

1.2 Διαδικασια Poisson

Απαριθμητρια διαδικασια

Η στοχαστικη διαδικασια $\{N(t), t \geq 0\}$ λεγεται απαριθμητρια αν η τμ $N(t)$ δινει τον αριθμό των γεγονότων μεχρι τη στιγμή t.



Ιδιότητες Απαριθμήτριας $\{N(t), t \geq 0\}$

Η $N(t)$ παιρνει τιμες στο $\mathbb{N}$: Αν $s \leq t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$

- Αν $s < t$, τοτε $N(t) - N(s) = \#$ γεγονοτων στο $(s, t]$

Τυχαίες μεταβλητες που εμφανιζονται

X_1 = χρόνος μεχρι 1ο γεγονος

X_i = χρόνος μεταξύ $(i-1)$-οστου και i-οστου γεγονότος

$\{X_n, n \geq 1\}$ ακολουθία ενδιαμεσων χρόνων γεγονότων

S_n : χρόνος που συμβαινει το n-οστό γεγονός

$X_1 = S_1$

$S_2 = X_1 + X_2$

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad , n \geq 1$

$X_3 = S_3 - S_2$

$X_n = S_n - S_{n-1} \quad , n \geq 2$

$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$