Από Μαθημα 12

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \;\cdots \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ειναι της μορφης upper Hessenberg

M|G|1 μετα απο στιγμες αναχωρησης

X_n = # πελατων μετα τη n-οστη αναχώρηση

14/11/22 (13ο Μάθημα)

3.2 Μεταβατική συμπεριφορά

βασικοί ορισμοί

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S,
αρχική κατανομή $\pi_i^{(0)} = P(X_0=i)$, $i\in S$
και πίνακα μετάβασης P

$p_{ij}^{(n)} = P(X_n=j \mid X_0=i)$, $i,j\in S$ πιθανότητα μετάβασης n-οστής τάξης

$P^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}]_{(i,j)\in S\times S}$
πίνακας πιθ. μετάβασης n-οστής τάξης

$\pi_i^{(n)} = P(X_n=i)$, $i\in S$ μεταβατική πιθανότητα n-οστής τάξης

$\pi^{(n)} = [\pi_i^{(n)}]_{i\in S}$, μεταβατική κατανομή n-οστής τάξης.

$m_{ij}^{(n)} = E\left[\begin{array}{l}\#\text{ επισκέψεων στην } j\\ \text{στα } n \text{ πρώτα βήματα}\end{array} \middle| X_0=i\right]$ $i\in S, j\in S$

$M^{(n)} = [m_{ij}^{(n)}]_{(i,j)\in S\times S}$
(πίνακας)

Θεώρημα: (Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov)

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r\in S} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(n-k)}, \quad i,j\in S,\ k\in\{0,1,\dots,n\}$$

Ισοδύναμα, $P^{(n)} = P^{(k)}P^{(n-k)}$ $k\in\{0,1,\dots,n\}$

Scanned with CamScanner

Απόδειξη: $P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$

$$\overset{\text{θοπ}}{=} \sum_{r\in S} \underbrace{P(X_n=j \mid X_k=r, \cancel{X_0=i})}_{\text{χρ. ομογ.}} \underbrace{P(X_k=r \mid X_0=i)}_{P_{ir}^{(k)}}$$

(μαρκοβ. ιδιότητα)

$$P(X_{n-k}=j \mid X_0=r) = P_{rj}^{(n-k)}$$

$$\Rightarrow P_{ij}^{(n)} = \sum_{r\in S} P_{ir}^{(k)} \cdot P_{rj}^{(n-k)} = \left(\text{i γραμμή του } P^{(k)}\right) \times \left(\text{j-οστή στήλη του } P^{(n-k)}\right)$$

Άρα, $P^{(n)} = P^{(k)} P^{(n-k)}$

$$\left(\begin{aligned} P^{(5)} &= P^{(2)} P^{(3)} \\ &= P^{(1)} P^{(4)} \end{aligned} \right)$$

Θεώρημα: $P^{(n)} = P^n$, $n \geq 0$

Απόδειξη: Επαγωγικά, $P^{(0)} = I = P^0$

Επίσης, $P^{(1)} = P$

Άρα, η σχέση ισχύει για $n=0$ και $n=1$.
Έστω ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή

$P^{(k)} = P^k$. Θδο ισχύει για $k+1$

$$P^{(k+1)} \overset{C-K}{=} P^{(k)} P^{(1)} = P^k \cdot P = P^{k+1} \checkmark$$

Θεώρημα: $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$, $n \geq 0$

Απόδειξη: $$\pi_i^{(n)} = P(X_n = i) \underset{\text{θ.ο.π}}{=} \sum_{j\in S} \overbrace{P(X_n=i \mid X_0=j)}^{P_{ji}^{(n)}} \cdot \underbrace{P(X_0=j)}_{\pi_j^{(0)}}$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \pi_i^{(n)} = \sum_{j \in S} \pi_j^{(0)} P_{ji}^{(n)} = \pi^{(0)} \times \begin{pmatrix} \text{i-οστη στηλη} \\ \text{του } P^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^{(n)} \Rightarrow \pi^{(n)} = \pi^{(0)} \cdot P^n$$

Θεωρημα: $M^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} P^k$

Αποδειξη: $m_{ij}^{(n)} = E\left[\begin{matrix}\#\text{ επισκεψεων} \\ \text{στην } j \text{ στα } n \\ \text{πρωτα βηματα}\end{matrix} \middle| X_0 = i\right]$

$$= E\left[\sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix}\#\text{ επισκ.} \\ \text{στην } j \\ \text{στο βημα } k\end{Bmatrix} \middle| X_0 = i\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E\left[\underbrace{\begin{matrix}\#\text{ επισκ.} \\ \text{στην } j \\ \text{στο βημα } k\end{matrix}}_{\begin{cases} 0, & X_k \neq j \\ 1, & X_k = j \end{cases} = 1\{X_k = j\}} \middle| X_0 = i\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E[1\{X_k = j\} | X_0 = i] =$$

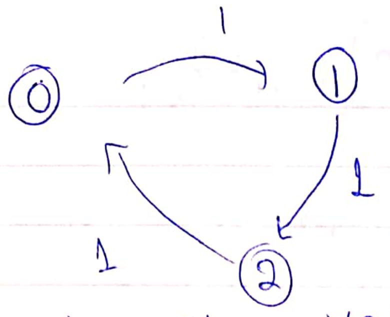
$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(X_k = j | X_0 = i)$$

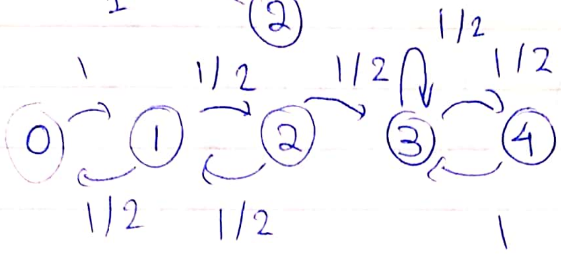
$$\Rightarrow m_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)}$$

$$\Rightarrow M^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} P^k$$

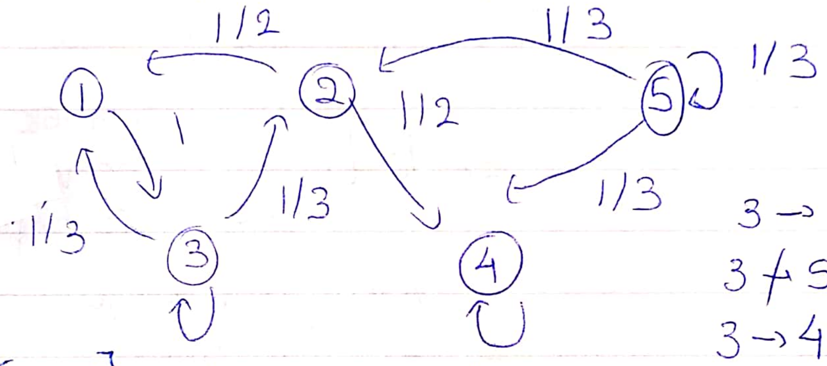
Scanned with CamScanner

$$\lim_{k\to\infty} \Pi_2^{3k+1} = 0$$





3.3 Προσπελασιμότητα / Επικοινωνία



$1 \leftrightarrow 2$, $4 \not\to i$

$3 \leftrightarrow 2$

$1 \leftrightarrow 3$

$5 \not\leftarrow j \in \{1..4\}$, $i \in \{1,2,3,5\}$

$3 \to 1$ ($p_{31} > 0$)

$3 \not\to 5$

$3 \to 4$ ($P^{(2)}_{34} > 0$ διότι $P_{32}P_{24} > 0$)

$i \to 4$, $5 \to i$ $\forall i \in S$, $\forall j \in S$

Ορισμός: (Προσπελασιμότητα)

Η $j \in S$ λέγεται προσπελάσιμη (προσβάσιμη / προσιτή) από την $i \in S$, αν $\exists\, n \geq 0 : P_{ij}^{(n)} > 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} > 0$

Τότε γράφουμε $i \to j$

Ορισμός: (Επικοινωνία)

Οι $i, j \in S$ επικοινωνούν αν $i \to j$ και $j \to i$

Τότε γράφουμε $i \leftrightarrow j$

Scanned with CamScanner

Θεώρημα: Η επικοινωνια ειναι σχεση ισοδυναμιας, Άρα ο χ.κ S διαχωρίζεται σε κλασεις επικοινωνιας.

Οι κλασεις επικοινωνιας ειναι $\{1,2,3\}$ $\{4\}$ $\{5\}$

ανοιχτη κλειστη ανοιχτη

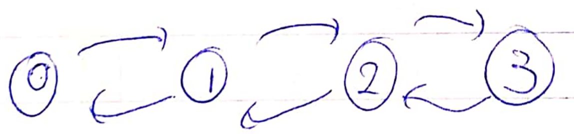
Ορισμός: (κλειστη/ανοιχτη κλαση επικοινωνιας)
Μια κλαση επικοινωνιας C καλειται κλειστη αν $\forall i \in C$, $j \in S \setminus C$ $p_{ij}=0$
Μια κλαση που δεν ειναι κλειστη λέγεται ανοιχτη.

Ορισμός (Απορροφητικη κατασταση)
Η $j \in S$ ονομαζεται απορροφητικη αν η $\{j\}$ αποτελει κλειστη κλαση επικοινωνιας.

Η 4 ειναι απορροφητικη κατασταση

Ορισμός (Αδιαχωριστη ΜΑΔΧ)
Η ΜΑΔΧ $\{X_n, n \geq 0\}$ ονομαζεται αδιαχωριστη αν ολες οι καταστασεις επικοινωνουν.

π.χ



Κλάσεις επικοινωνιας

$\{0\}$

$\{1,2\}$

$\{3\}$

Scanned with CamScanner

3.4) Χρόνοι $1^{ης}$ εισόδου

Ορισμός: Αν $C \subseteq S$ ορίζουμε τα ακόλουθα:

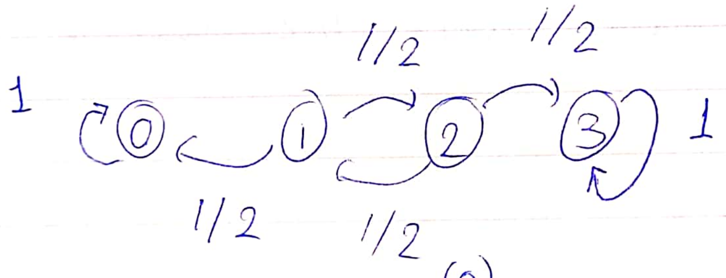
$T_C = \inf\{n \geq 0 : X_n \in C\}$: χρόνος $1^{ης}$ εισόδου στο C

$h_i(C) = P(T_C < \infty \mid X_0 = i)$, $i \in S$
πιθανότητα $1^{ης}$ εισόδου στο C ξεκινώντας από την i.

$m(C) = E[T_C \mid X_0 = i]$, $i \in S$
μέσος χρόνος $1^{ης}$ εισόδου στο C ξεκινώντας από την i.

Αν C κλειστό σύνολο, τον χρόνο $1^{ης}$ εισόδου τον λέω χρόνο απορρόφησης

Παράδειγμα:



Υποθέτουμε ότι $\pi_1^{(0)} = 1$

(α) πιθανότητα να απορροφηθεί στην 3
$= h_1(\{3\})$

(β) Μέσος χρόνος απορρόφησης στο $\{0,3\}$ $= m_1(\{0,3\})$

Scanned with CamScanner

Λύση: α) Θα γραψω ενα συστημα για ολες τις πιθανοτητες $h_i(\{3\})$, δεσμευοντας ως προς X_1. (αναλυση πρωτου βηματος)

$$h_3(\{3\}) = 1 \quad \text{(βρισκομαι ηδη εκει)}$$

$$h_0(\{3\}) = 0$$

$$h_1(\{3\}) = P(T_{\{3\}} < \infty \mid X_0 = 1)$$

$$\overset{\text{θοπ}}{=} \sum_{j=0,2} \underbrace{P(T_{\{3\}} < \infty \mid \cancel{X_0 = 1}, X_1 = j)}_{h_1(\{3\})} \cdot \underbrace{P(X_1 = j \mid X_0 = i)}_{P_{1j}}$$

$$= P_{10}\, h_0(\{3\}) + P_{12}\, h_2(\{3\})$$

$$\Rightarrow h_1(\{3\}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot h_2(\{3\})$$

$$h_1(\{3\}) = \frac{1}{2} h_2(\{3\}) \quad (1)$$

$$h_2(\{3\}) = \frac{1}{2} h_1(\{3\}) + \frac{1}{2} h_3(\{3\})$$

$$h_2(\{3\}) = \frac{1}{2} h_1(\{3\}) + \frac{1}{2}\ 1 \quad (2)$$

$$(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} h_2(\{3\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} h_2(\{3\}) + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{3}{4} h_2(\{3\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow h_2(\{3\}) = \frac{2}{3} \quad (3)$$

$$h_1(\{3\}) = \frac{1}{3}$$

Scanned with CamScanner