17/10/22 (6º Μάθημα)

2. Ανανεωτικές Διαδικασίες

Ορισμός: Έστω μια απαριθμητρια σδ $\{N(t), t \geq 0\}$ με ενδ. χρουσις γεγονοτων $\{X_n, n \geq 1\}$ και ακολουθια χρωων γεγονοτων $\{S_n, n \geq 1\}$. Η $\{N(t), t \geq 0\}$ λεγεται ανανεωτικη διαδικασια (renewal process RP) Αν η $\{X_n, n \geq 1\}$ ειναι ακολουθια ανεξαρτητων και ισονομων τμ. Η $\{S_n, n \geq 1\}$ ονομαζεται ανανεωτι-κη ακολουθια.

Παράδειγμα 1) (PP(λ))

Η $\{N(t), t \geq 0\}$ που ειναι διαδικασια Poisson με ρυθμο λ ειναι ανανεωτικη διαδικασια, γιατι οι $X_n \sim Exp(\lambda)$ και X_1, X_2 ανεξ.

Παράδειγμα 2) (G/M/1)

ουρά

G: $\{A_n, n \geq 1\}$ ακολ. ενδ. χρουων αφιξεων $A_n \sim G \rightarrow$ ανεξαρτητες

M: $X_n \sim Exp(\mu)$ X_1, X_2 ανεξ

1 υπηρετης, ∞ χωρητικοτητα, FCFS

$A(t)$: # αφιξεων μεχρι τη στιγμη t

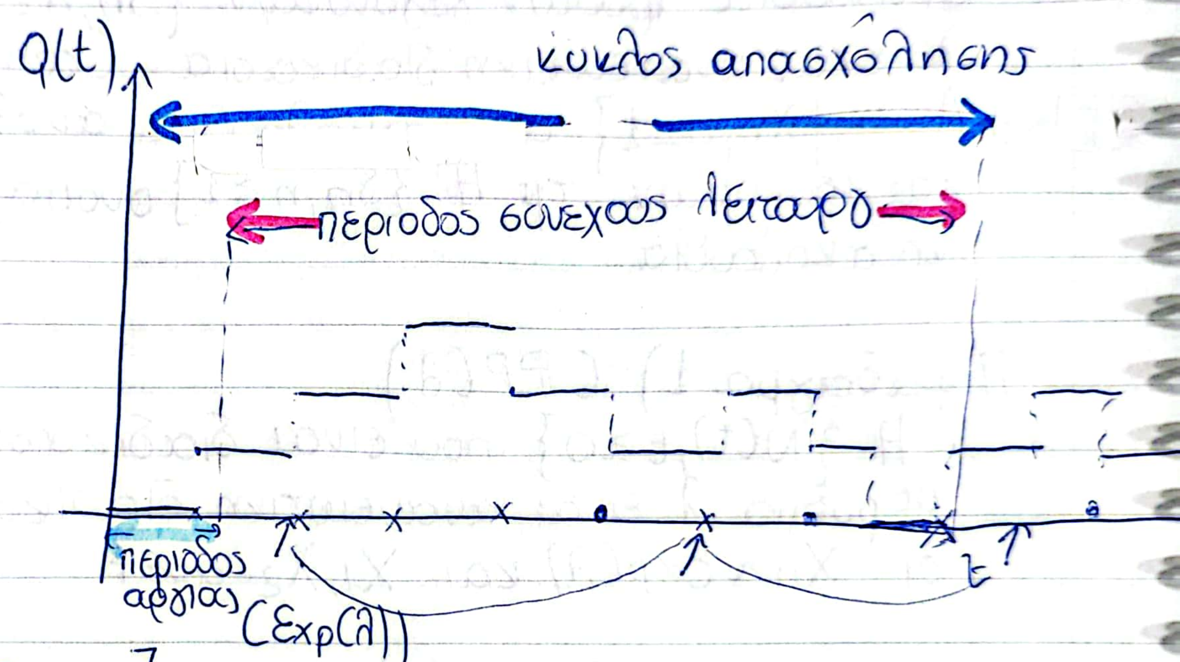
$D(t)$: # αναχωρησεων μεχρι τη στιγμη t

$Q(t)$: # πελατων στο συστημα μεχρι τη στιγμη t

$A_k(t)$: # πελατων που βρισκουν K πελατες κατα την αφιξη τους στο $(0,t]$.

$D_k(t)$: # εξυπηρετ. που αφησαν το συστημα με κ πελατες στο $(0,t]$.

$\{A(t), t\geq 0\}$ ειναι ανανεωτική διαδικασια
$\{D(t), t\geq 0\}$ δεν ειναι ανανεωτικη.
$\{Q(t), t\geq 0\}$



$\{A_{\bar{k}}(t), t\geq 0\}$

Για $k=1$ Μετα την αφιξη ενος πελατη που βρισκει στο συστημα εναν πελατη τρεχουν οι εξης χρόνοι.

δεν εξαρτ. απο το παρελθον
- Ο χρονος μεχρι την επομενη αφιξη $\sim G$
- Ο χρονος εξυπηρ του πελατη που βρισκεται στον υπηρετη $\sim Exp(\mu)$

Η $\{A_1(t), t\geq 0\}$ Ειναι ανανεωτικη διαδικασια αν θεωρησουμε οτι τη στιγμη 0 εχουμε αφιξη πελατη που βλεπει στο συστημα 1 πελατη

Scanned with CamScanner

$\{D_k^+(t), t \geq 0\}$

Για $k=1$ Θεωρουμε οτι εχει γινει εξυπηρετηση που αφησε το συστημα με εναν πελατη.
Οι χρονοι που τρεχουν ειναι ο χρονος εξυπηρ $\sim Exp(\mu)$.
Ο υπολοιπομενος χρονος αφιξης $\sim$?
εξαρταται απο το παρελθον
Οι ενδιαμεσοι χρονοι δεν ειναι ανεξαρτητοι αρα οχι ανανεωτικη διαδικασια.

Παραδειγμα 3: $(M/G/1)$
ουρα
$X_n \sim G$
$A_n \sim Exp(\lambda)$

Z_n διάρκεια του n-οστου κυκλου απασχολησης
$N_Z(t)$: # κυκλων απασχ που ολοκληρωθηκαν μεχρι τη στιγμη t.
$\{N_Z(t), t \geq 0\}$ ειναι ανανεωτική διαδικασία, διοτι οι ενδιαμεσοι χρονοι $\{Z_n, n \geq 1\}$ ειναι ανεξ κ' ισονομες τμ

$\{D(t), t \geq 0\}$ δεν ειναι
$\{A(t), t \geq 0\}$ ειναι

$\{A_k^-(t), t \geq 0\}$ δεν ειναι ανανεωτικη

$\{D_k^+(t), t \geq 0\}$ ειναι ανανεωτικη

Παραδειγμα 4: (Αντικαταστασn μηχανης)

Τη στιγμη 0 εχουμε μια νεα μηχανη

Πολιτικη αντικαταστασης. Αντικαθιστουμε τη μηχανη με μια ιδια μολις χαλασει ή περασει χρονος T.

L_i: χρονος ζωης μηχανης i

L_1... ισονομες και ανεξαρτητες

X_i: ενδιαμεσος χρονος μεταξυ $(i-1)$-οστης και i-οστης αντικαταστασης

$$X_i = \min\{L_i, T\}$$

$N_1(t)$ = # αντικαταστασεων λογω βλαβης στο $(0,t]$

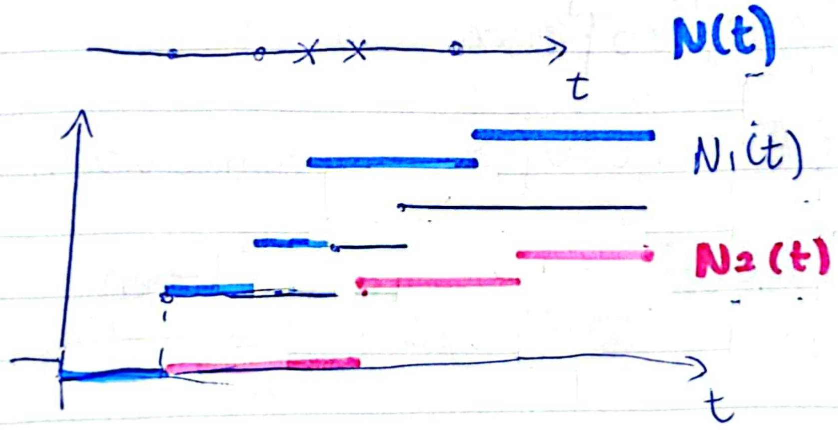
$N_2(t)$ = # " λογω παλαιοτητας στο $(0,t]$

$N(t)$ = # " στο $(0,t]$

$\{N_1(t), t \geq 0\}$ ✓

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ ✓

$\{N(t), t \geq 0\}$ ✓

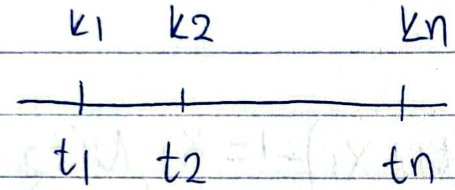


Θεώρημα:

$\{N(t), t \ge 0\}$ RP
με ακολ. ευδ. χρονων $\{X_n, n \ge 1\}$ και $X_n \sim G$ $n=1,2,..$
$\Rightarrow$ Τοτε η $\{N(t), t \ge 0\}$ χαρακτηρίζεται από την G

Απόδειξη: Εστω $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ και ακεραιους
$0 \le k_1 \le k_2 \le \dots \le k_n$

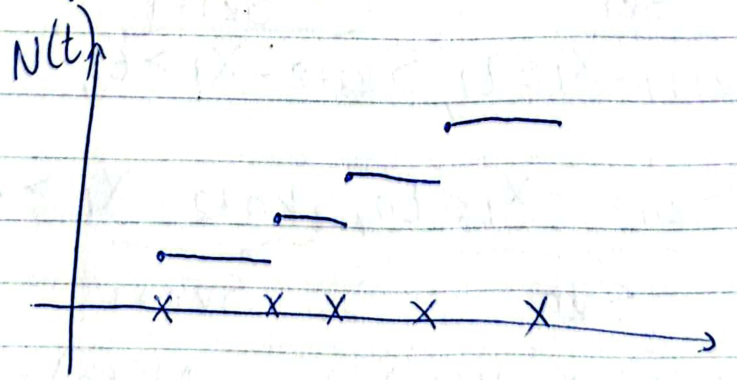
$$P(N(t_1)=k_1, N(t_2)=k_2, \dots, N(t_n)=k_n)$$



$$P(S_{k_1} \le t_1, S_{k_1+1} > t_1, S_{k_2} \le t_2, S_{k_2+1} > t_2, \dots, S_{k_n} \le t_n, S_{k_n+1} > t_n)$$

Ομως, $S_k = X_1 + \dots + X_k$, $k \ge 1$

Άρα, σ.κ της S_k, γραφεται συναρτησει της G
Άρα, η πιθανοτητα που θελουμε να υπολογισουμε εκφραζεται συναρτησει της G.



Θεώρημα:

$\{N(t), t\geq 0\}$ RP με ενδ χρονιων (ακολουθια) $\{X_n, n\geq 1\}$

$\Rightarrow$ Η $\{N(t), t\geq 0\}$ και η $\{N(t+X_1)-1, t\geq 0\}$ ειναι ισοδυναμες

\# γεγ. στο $(0,t]$

\# γεγ t χρ. μοναδες μετα το X_1.

Αποδ.: Έστω $0<t_1<t_2<\ldots<t_n$ και $0\leq k_1\leq k_2\leq \ldots \leq k_n$ ακεραιοι. Ανδο $P(N(t_1)=k_1, \ldots N(t_n)=k_n)$

$P(N(t_1+X_1)-1=k_1, \ldots N(t_n+X_n)-1=k_n)$

Εχουμε: $P(N(t_1+X_1)-1=k_1, N(t_2+X_2)-1=k_2 \ldots N(t_n+X_n)-1=k_n)$

$$= P(N(t_1+X_1)=k_1+1, N(t_2+X_1)=k_2+1, \ldots N(t_n+X_1)=k_n+1)$$

$$= P(S_{k_1+1}\leq t_1+X_1, S_{k_1+2}>t_1+X_1, S_{k_2+1}\leq t_2+X_1, S_{k_2+2}>t_2+X_1, \ldots S_{k_n+1}\leq t_n+X_1, S_{k_n+2}>t_n+X_1)$$

$$= P(\underbrace{S_{k_1+1}-X_1}_{S_{k_1}}\leq t_1, \underbrace{S_{k_1+2}-X_1}_{S_{k_1+1}}>t_1, \ldots \underbrace{S_{k_n+1}-X_1}_{S_{k_n}}\leq t_n, \underbrace{S_{k_n+2}-X_1}_{S_{k_n+1}}>t_n)$$

$$= P(N(t_1)=k_1, N(t_2)=k_2, \ldots N(t_n)=k_n)$$