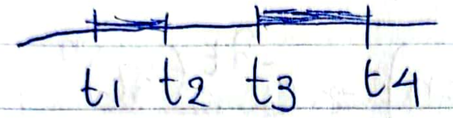
05/10/22 (3ο Μάθημα)

Απαριθμήτρια σ.δ με ανεξαρτητες προσαυξασεις

Μια απαριθμητρια σδ $\{N(t), t \geq 0\}$ εχει ανεξαρτητες προσαυξησεις αν $\forall\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$

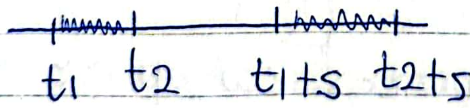


$N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_4) - N(t_3)$ ανεξαρτητες

Δηλ οι # γεγονότων σε μη επικαλυπτομενα διαστηματα ειναι ανεξάρτητοι.

Απαριθμητρια σδ με ομογενεις προσαυξησεις

Μια απαριθμητρια σδ $\{N(t), t \geq 0\}$ εχει ομογενεις προσαυξησεις αν $\forall\ t_1, t_2, s$
$0 \leq t_1 \leq t_2,\ s \geq 0$



αν $N(t_2) - N(t_1) \overset{d}{=} N(t_2+s) - N(t_1+s)$

Δηλαδή # γεγονοτων εξαρταται απο το μηκος του διαστηματος και οχι απο το που βρισκεται το διαστημα.

Διαδικασια Poisson Ορισμός 1 (Μακροσκοπικός)

Μια απαριθμήτρια σδ διαδικασία $\{N(t), t\geq 0\}$ λέγεται Poisson με ρυθμο λ, $\lambda \geq 0$. $PP(\lambda)$ άν

(1i) $N(0)=0$

(1ii) Εχει ανεξαρτητες και ομογενεις προσαυξησεις

(1iii) $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ $n=0,1,\dots$

Αρα $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

Οποτε $E[N(t)] = \lambda t$

$Var[N(t)] = \lambda t$

Διαδικασια Poisson - Ορισμός 2 (Μικροσκοπικος)

Μια απαριθμητρια σδ $\{N(t), t\geq 0\}$ ειναι Poisson με ρυθμο λ, $\lambda \geq 0$ αν

(2i) $N(0)=0$

(2ii) Εχει ανεξάρτητες και ομογενεις προσαυξησεις

(2iii)
$$\left.\begin{aligned} P(N(h)=1) &= \lambda h + o(h) \\ P(N(h)=0) &= 1-\lambda h + o(h) \end{aligned}\right\} \quad \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$$

$$\Rightarrow P(N(h)\geq 2) = o(h)$$

Διαδικασία Poisson - Ορισμός 3

Μια απαριθμητρια σδ $\{N(t), t\geq 0\}$ ειναι Poisson με ρυθμό λ, $\lambda>0$ αν οι ~~χρονοι~~ ενδ. χρονοι γεγονοτων $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ειναι ανεξαρτητες και ισονομες, εκθετικά κατανεμημενες τμ με παράμετρο λ.

Ορισμός 1 $\Leftrightarrow$ Ορισμός 2

$(1i) \Rightarrow (2i)$

$(1ii) \Rightarrow (2ii)$

$(1iii)$ $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$ $n=0,1,2\ldots$

$$P(N(h)=0) = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^0}{0!} = e^{-\lambda h} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^k}{k!} = \qquad \left(e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)$$

$$= 1-\lambda h + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k \cdot h^k}{k!}}_{o(h)}$$

$$= 1-\lambda h + o(h)$$

$$P(N(h)=1) = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^1}{1!} = e^{-\lambda h}(\lambda h) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^k}{k!}\lambda h = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \lambda^{k+1} h^{k+1}}{k!} =$$

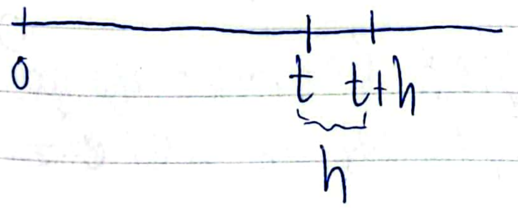
$$= \lambda h + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{k+1}}{k!} \cdot h^{k+1}}_{o(h)}$$

Ορισμός 2 $(\Rightarrow)$ Ορισμός 1

$(2i) \Rightarrow (1i)$
$(2ii) \Rightarrow (1ii)$

$(2iii)$ θέτω $P(N(t)=n) = P_n(t)$
Για την $P_0(t)$ έχουμε

$$P_0(t+h) = P(N(t+h)=0) = P(N(t)=0,\ N(t+h)-N(t)=0)$$



$$\overset{\text{ανεξ προσαυξ.}}{=} P(N(t)=0)\,P(N(t+h)-N(t)=0)$$
$$\overset{\text{ανεξ}}{=} P(N(t)=0)\,P(N(h)=0)$$
$$\overset{\text{προσ}}{=} P_0(t)(1-\lambda h + o(h))$$

$$P_0(t+h) = P_0(t) - \lambda P_0(t) h + P_0(t) \cdot o(h) \Rightarrow$$
$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + P_0(t)\frac{o(h)}{h} \overset{h \to 0^+}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + 0$$

$$\Rightarrow e^{\lambda t}P_0'(t) + e^{\lambda t}\lambda P_0(t) = 0$$

$$\Rightarrow \left(e^{\lambda t}P_0(t)\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$e^{\lambda t}P_0(t) = c \Rightarrow P_0(t) = ce^{-\lambda t} \quad (1)$$

Έχουμε $P_0(0) = P(N(0)=0) = 1$

(1) $t=0 \Rightarrow 1 = c\cdot e^{-\lambda 0}$

$$c = 1$$

Άρα $P_0(t) = P(N(t)=0) = e^{-\lambda t}$

Για $n \geq 1$: $P_n(t+h) = P(N(t+h)=n) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(N(t)=k, N(t+h)-N(t)=n-k)$$

ανεξ. ομογ. προσ. $\sum_{k=0}^{n} P(N(t)=k)P(N(h)=n-k)$ $\quad k \quad t \quad t+h \quad n-k$

$$= P(N(t)=n)P(N(h)=0)$$

$$+ P(N(t)=n-1)P(N(h)=1)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} P(N(t)=k)P(N(h)=n-k)$$

$$= P_n(t)\cdot(1-\lambda h+o(h)) + P_{n-1}(t)(\lambda h+o(h)) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} P_k(t)\cdot o(h).$$

$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = \frac{\lambda\cdot P_n(t)\cdot h}{h} + \frac{\lambda P_{n-1}(t)h}{h} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{P_k(t)\cdot o(h)}{h}.$$

$h \to 0^+$

$\Rightarrow \quad P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \overset{e^{\lambda t}}{\Rightarrow}$

$$e^{\lambda t} P_n'(t) + \lambda e^{\lambda t} P_n(t) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \Rightarrow$$

$$\left(e^{\lambda t} P_n(t)\right)' = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \quad (2)$$

Για $n=1$: $(2) \Rightarrow \left(e^{\lambda t} P_n(t)\right)' = \lambda e^{\lambda t} P_0(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(e^{\lambda t} P_1(t)\right)' = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t} \Rightarrow$$

$$e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda t + c \quad (3)$$

Γνωρίζουμε ότι $P_1(0) = P(N(0)=1) = 0$

$$(3) \overset{t=0}{\Rightarrow} \quad P_1(0) = c \Rightarrow c = 0$$

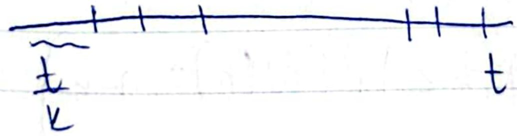
Οπότε $e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda t \Rightarrow P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

Αναδρομικά, μπορούμε νδο $P_n(t) = P(N(t)=n) =$

$$= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \quad n=0,1,$$

<u>2η αποδειξη του (1(iii))</u>

$$P(N(t)=n) = ;$$



Χωρίζουμε σε k διαστηματα, το καθε ενα με μηκος $\frac{t}{k}$

$$P\left(N\left(\tfrac{t}{k}\right)=0\right) = 1 - \lambda \frac{t}{k} + o\left(\frac{t}{k}\right)$$

$$P\left(N\left(\tfrac{t}{k}\right)=1\right) = \lambda \frac{t}{k} + o\left(\frac{t}{k}\right)$$

$$P\left(N\left(\tfrac{t}{k}\right)\geq 2\right) = o\left(\frac{t}{k}\right)$$

Θεωρω στα $k \to \infty$, οποτε $\frac{t}{k} \to 0$

Σε καθε διαστημα μπορει να συμβουν ο π' 1 γεγονοτα $N(t)$ = # γεγονοτων στο $(0, t]$

= # γεγονοτων στα k διαστηματα

$N(t)$ = # διαστηματων στα οποια εχει συμβει 1 γεγονος.

$$\sim Bin\left(k, \lambda \frac{t}{k} + o\left(\frac{t}{k}\right)\right)$$

καθώς $k \to \infty$ και $k\left[\lambda \frac{t}{k} + o\left(\frac{t}{k}\right)\right] =$

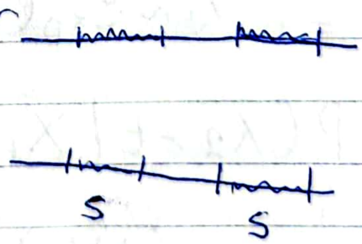
$$= \lambda t + t \frac{o\left(\frac{t}{k}\right)}{\frac{t}{k}} \xrightarrow{t \to \infty} \lambda t$$

Αυτη προσεγγιζεται απο την Poisson(λt)

Ορισμός 3 $(\Rightarrow)$ Ορισμός 1

$$P(N(0)=0) = P(\underbrace{X_1 > 0}_{\sim Exp(\lambda)}) = e^{-\lambda 0} = 1$$

Ανεξαρτητες κ' ομογενεις προσαυξησεις λόγω της αμνημουνης ιδιοτητας



Θνδο: $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n < t$$

Εφόσον $\{X_n\}_{n \geq 1}$ ανεξ κ' ισον. $Exp(\lambda)$

$S_n = X_1 + \dots + X_n \sim Erlang(n, \lambda)$

$$P(N(t)=n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1)$$
$$= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$
$$= F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t)$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \left(1 - \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) =$$

κατα παραγοντες

$$\left(F_{S_n}(x) = \int_0^x \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} \, du \underset{\text{ολοκληρωση}}{=} \right.$$

$$\left. = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right)$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Άρα $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

Ορισμός 1 $\Leftrightarrow$ Ορισμός 3

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

$\Rightarrow X_1 \sim Exp(\lambda)$

$$P(X_2 > t \mid X_1 = s) = P(N(t+s) - N(s) = 0 \mid X_1 = s)$$
$$= P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

Άρα X_2 ανεξ της X_1 και $X_2 \sim Exp(\lambda)$

Συνεχίζω επαγωγικά

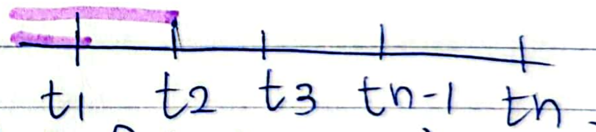
Από κοινού κατανομή

$$\left.\begin{array}{l}\{N(t),\ t\geq 0\}\ PP(\lambda)\\ 0\leq t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_n\\ 0\leq k_1\leq k_2\leq\dots\leq k_n\end{array}\right\} \Rightarrow P(N(t)=k_1, N(t_2)=k_2, \dots N(t_n)=k_n)$$

$$= \frac{e^{-\lambda t_n}(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}\frac{(\lambda(t_2-t_1))^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}\dots\frac{(\lambda(t_n-t_{n-1}))^{k_n-k_{n-1}}}{(k_n-k_{n-1})!}$$

Απόδειξη: $P(N(t_1)=k_1, N(t_2)=k_2, \dots N(t_n)=k_n)$

$$= P(N(t_1)=k_1, N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1, N(t_3)-N(t_2)=$$
$$=k_3-k_2, \dots N(t_n)-N(t_{n-1})=k_n-k_{n-1})$$



$\overset{\text{ανεξ}}{=}$ $P(N(t_1)=k_1)P(N(t_2-t_1)=k_2-k_1)\dots P(N(t_n-t_{n-1})=k_n-k_{n-1})$

κ' ομογ
προσαυξ.

$$= e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\frac{(\lambda(t_2-t_1))^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}\dots$$

$$\cdot e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}\cdot\frac{(\lambda(t_n-t_{n-1}))^{k_n-k_{n-1}}}{(k_n-k_{n-1})!}$$