Ασκήσεις Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών

1ο Φυλλάδιο

Παράδοση 9 Οκτωβρίου 2019

(1) Δείξτε ότι σε μία ακέραια περιόχη
   (α') Το x είναι μονάδα αν και μόνο αν $x \mid 1$.
   (β') Θα λέμε ότι τα x, y είναι συσχετισμένα και θα το συμβολίζουμε με $x \cong y$ αν υπάρχει μονάδα u, ώστε $x = uy$. Δείξτε ότι κάθε δύο μονάδες είναι συσχετισμένες και κάθε στοιχείο συσχετισμένο με μονάδα είναι και αυτό μονάδα.
   (γ') Δείξτε ότι $x \cong y$ αν και μόνο αν $x \mid y$ και $y \mid x$.
   (δ') Θα λέμε ότι το x είναι ανάγωγο αν $x = ab$, τότε a ή b είναι μονάδα. Δείξτε ότι κάθε συσχετισμένο ανάγωγου είναι ανάγωγο.

(2) Έστω R μια ακέραια περιοχή και x, y μη μηδενικά στοιχεία του R. Δείξτε ότι
   (α') $x \mid y$ αν και μόνο αν $\langle x \rangle \supset \langle y \rangle$.
   (β') $x \cong y$ αν και μόνο αν $\langle x \rangle = \langle y \rangle$.
   (γ') x είναι μονάδα αν και μόνο αν $\langle x \rangle = R$.
   (δ') Το x είναι ανάγωγο αν και μόνο αν το x είναι μέγιστο ανάμεσα στα γνήσια κύρια ιδεώδη του R.

(3) Θα λέμε ότι μία ακεραία περιοχή R είναι ένας ευκλείδιος δακτύλιος αν υπάρχει συνάρτηση $\phi : R\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ ώστε
   - Αν $a, b \in R\backslash\{0\}$ και $a \mid b$ τότε $\phi(a) \leqslant \phi(b)$.
   - Αν $a, b \in R\backslash\{0\}$ τότε υπάρχουν $q, r \in R$ με $a = bq + r$ όπου $r = 0$ ή $\phi(r) < \phi(b)$.

   Δείξτε ότι σε κάθε ευκλείδιο δακτύλιο κάθε ιδεώδες είναι κύριο. Αναφέρετε τρία διαφορετικά παραδείγματα ευκλειδίων δακτυλίων.

(4) Αποδείξτε ότι σε κάθε περιοχή κυρίων ιδεωδών έχουμε μοναδική παραγοντοποίηση σε ανάγωγα, δηλαδή κάθε μη μηδενικό στοιχείο γράφεται ως
$$x = up_1 \cdots p_r,$$
   όπου το u είναι μονάδα για κάθε άλλη παραγοντοποίηση του $x = wp'_1 \cdots p'_s$ σε ανάγωγα ισχύει $r = s$ και κάθε p_i σχετίζεται με ένα $p'_{\sigma(i)}$ για κατάλληλη μετάθεση σ.

(5) Ορίζουμε την συνάρτηση $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$ με $N(a+ib) = a^2+b^2$. Δείξτε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ έχουμε $N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$. Δείξτε ότι αν $z_1 \mid z_2$ τότε $N(z_1) \mid N(z_2)$. Δείξτε ότι $z \in \mathbb{Z}[i]$ είναι μονάδα αν και μόνο αν $N(z) = 1$. Δείξτε ότι αν $N(z)$ είναι πρώτος αριθμός τότε z είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[i]$.

(6) Θα χρησιμοποιήσουμε την μοναδική παραγοντοποίηση στο $\mathbb{Z}[i]$ για να αποδείξουμε ότι κάθε πρώτος $p \equiv 1 \mod 4$ είναι άθροισμα δύο τετραγώνων.
   (α') Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{F}_p^*$ του σώματος $\mathbb{F}_p$ είναι κυκλική για να δείξετε ότι αν $p \equiv 1 \mod 4$ τότε $n^2 \equiv -1 \mod p$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$.
   (β') Δείξτε ότι το p δεν μπορεί να είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[i]$ κάνοντας χρήση του $p \mid n^2 + 1 = (n + i)(n - i)$.
   (γ') Αποδείτε ότι το p είναι άθροισμα δύο τετραγώνων κάνοντας χρήση του $p = (a+bi)(c+id)$ όπου κανένας από τους δύο παράγωντες δεν είναι μονάδα.

(7) Θέτουμε $\omega = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\sqrt{3}2$. Ορίζουμε την $N : \mathbb{Z}[\omega] \to \mathbb{Z}$ με $N(a + b\omega) = a^2 - ab + b^2$. Δείξτε ότι αν $a + b\omega$ γράφεται στην μορφή $u + vi$ με $u, v \in \mathbb{R}$, τότε $N(a + b\omega) = u^2 + v^2$. Δείξτε ότι για όλα τα $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\omega]$, $N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$. Δείξτε αν $z_1 \mid z_2$ τότε $N(z_1) \mid N(z_2)$. Δείξτε ότι $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ είναι μονάδα αν και μόνο αν $N(z) = 1$ και να βρεθούν όλες οι μονάδες του $\mathbb{Z}[\omega]$. Δείξτε ότι το $1 - \omega$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[\omega]$ και ότι $3 = u(1 - \omega)^2$ για κάποια μονάδα u. Δείξτε ότι το $\mathbb{Z}[\omega]$ είναι περιοχή μονοσήμαντης ανάλυσης.