Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών.

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες.

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:													

Βαθμοί

1 [3,5]	2 [3,5]	3 [3,5]	Σύνολο

Καλη Επιτυχια

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 1 [3,5 μονάδες].

Έστω $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; <^{\mathfrak{N}}, S^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, E^{\mathfrak{N}}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}} \rangle$ η δομή των φυσικών αριθμών στην πρωτοβάθμια γλώσσα $L^{\theta\alpha}$ της θεωρίας αριθμών με τις συνήθεις σχέσεις, πράξεις και σταθερές (υπενθυμίζουμε ότι $S^{\mathfrak{N}}$ είναι η μονομελής πράξη του διαδόχου και $E^{\mathfrak{N}}$ η διμελής πράξη της ύψωσης σε δύναμη). Έστω ακόμη $\mathfrak{A}$ μία οποιαδήποτε άλλη δομή στην ίδια γλώσσα στην οποία επαληθεύονται ακριβώς οι ίδιες προτάσεις της πρωτοβάθμιας γλώσσας $L^{\theta\alpha}$ όπως και στην $\mathfrak{N}$. Πόσοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς αληθεύουν;

(I) Στην $\mathfrak{A}$ αληθεύει ότι υπάρχουν άπειρες Πυθαγόρειες τριάδες, δηλαδή τριάδες $x, y, z \in |\mathfrak{A}|$ τέτοιες ώστε $x^2 + y^2 = z^2$ (οι σημειωμένες πράξεις νοούνται ως προς τις ερμηνείες τους στη δομή $\mathfrak{A}$).

(II) Δεν υπάρχει στο $|\mathfrak{A}|$ άπειρη γνησίως φθίνουσα ακολουθία (η διάταξη νοείται ως προς την ερμηνεία της στην $\mathfrak{A}$).

(III) Οποιοδήποτε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του σύμπαντος $|\mathfrak{A}|$ έχει μέγιστο στοιχείο (ως προς την $<^{\mathfrak{A}}$).

Κυκλώστε το σωστό, χωρίς αιτιολόγηση ούτε σχόλια:

(1) Αληθεύει ακριβώς ένας από τους ισχυρισμούς (I–III).

(2) Αληθεύουν ακριβώς δύο από τους ισχυρισμούς (I–III).

(3) Ουδείς αληθεύει.

(4) Αληθεύουν όλοι

Επισήμανση: Τα σύμβολα $\mathfrak{N}$ και $\mathfrak{A}$ είναι διαφορετικά.

Απάντηση: Σωστό είναι το (2) (αληθεύουν οι I και III).

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 2 [3,5 μονάδες]. Αποδείξτε με προσοχή τον ισχυρισμό III του προηγουμένου θέματος, αν εκτιμάτε ότι αληθεύει, ή δώστε με λεπτομέρειες αντιπαράδειγμα, αν πιστεύετε ότι δεν αληθεύει.

Απάντηση: Ο ισχυρισμός αληθεύει. Για να τον αποδείξουμε θα αποδείξουμε πρώτα ότι η $<^{\mathfrak{N}}$ είναι γνήσια ολική διάταξη. Πράγματι, η σύζευξη ϕ των προτάσεων

$$\begin{aligned}
\phi_1 &: \quad \forall x \forall y((x < y) \rightarrow (x \neq y)) \\
\phi_2 &: \quad \forall x \forall y \forall z((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z)) \\
\phi_3 &: \quad \forall x \forall y((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x))
\end{aligned}$$

εκφράζει ότι η $<^{\mathfrak{N}}$ είναι γνήσια ολική διάταξη. Η σύζευξη ϕ επαληθεύεται από την υπόθεση και για τη δομή $\mathfrak{A}$. Επομένως η $<^{\mathfrak{A}}$ είναι γνήσια ολική διάταξη.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε πεπερασμένο $A_0 \subseteq |\mathfrak{A}|$ έχει μέγιστο στοιχείο ως μία οποιαδήποτε γνήσια ολική διάταξη, άρα και για την $<^{\mathfrak{A}}$. Αυτό αποδεικνύεται επαγωγικά ως προς τον πληθάριθμο του A_0. Πράγματι, το ζητούμενο είναι φανερό αν το A_0 είναι μονοσύνολο. Αν τώρα $A_0 = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ με $a_{n+1} \neq a_i, i = 1, \ldots n$ και a το ελάχιστο στοιχείο του $\{a_1, \ldots, a_n\}$, τότε το ελάχιστο στοιχείο του A_0 είναι το a (ή το a_{n+1}) αν το $a < a_{n+1}$ (ή $a_{n+1} < a$, αντίστοιχα).

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 3 [3,5 μονάδες].

Έστω ϕ και ψ τύποι πρωτοτάξιας γλώσσας με το πολύ μία ελεύθερη μεταβλητή, τη x. Ποιος ή ποιοι από τους δύο παρακάτω ισχυρισμούς αληθεύουν; Να αποδείξετε προσεκτικά όσους τυχόν αληθεύουν και να δώσετε αντιπαράδειγμα για όσους τυχόν δεν αληθεύουν:

(I) Αν $\forall x(\phi \vee \psi)$ έγκυρη τότε $\forall x \phi$ είτε $\forall x \psi$ έγκυρη.

(II) Αν $\forall x(\phi \wedge \psi)$ έγκυρη τότε $\forall x \phi$ και $\forall x \psi$ έγκυρες.

Απάντηση:

Αντιπαράδειγμα για τον (I): Θεωρούμε τη γλώσσα με μόνο εξω-λογικό σύμβολο ένα μονοθέσιο σύμβολο κατηγορήματος R, ως ϕ τον τύπο $R(x)$ και ως ψ τον τύπο $\neg R(x)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η πρόταση $\forall x(\phi \vee \psi)$ είναι έγκυρη. Αλλά η $\forall x \phi$ δεν είναι διότι π.χ. δεν αληθεύει στη δομή με σύμπαν $\{0, 1\}$ και ερμηνεία του R το μονοσύνολο $\{0\}$. Παρομοίως για την $\forall x \psi$.

Απόδειξη για τον (II): Ας υποθέσουμε ότι η $\forall x(\phi \wedge \psi)$ είναι έγκυρη. Για να δείξουμε ότι και η $\forall x \phi$ έγκυρη θεωρούμε μία δομή $\mathfrak{A}$ και στοιχείο a του σύμπαντος A της $\mathfrak{A}$· αρκεί να δείξουμε ότι $\models_{\mathfrak{A}} \phi[\![a]\!]$. Επειδή όμως υποθέσαμε ότι η $\forall x(\phi \wedge \psi)$ είναι έγκυρη, έχουμε ότι $\models_{\mathfrak{A}} (\phi \wedge \psi)[\![a]\!]$, άρα από τον ορισμό του Tarski προκύπτει ότι $\models_{\mathfrak{A}} \phi[\![a]\!]$. Παρομοίως για την $\forall x \psi$.

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο