

Παραμετρική Πολυπλοκότητα και Αλγόριθμοι (ΑΛΜΑ)

2ο πακέτο ασκήσεων

15 Μαΐου 2018

1. Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα:

ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ	
Είσοδος:	Γράφημα G και φυσικός k .
Παράμετρος:	k .
Ερώτηση:	Είναι το G k -χρωματίσιμο;

Δείξτε ότι το πρόβλημα αυτό είναι para-NP-πλήρες.

2. Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα:

ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΟΙΝΗ ΥΠΟΛΕΞΗ	
Είσοδος:	Λέξεις $x_1, \dots, x_n \in \Sigma^*$ και φυσικός k .
Παράμετρος:	d .
Ερώτηση:	Υπάρχει λέξη $y \in \Sigma^*$, μήκους k , που είναι υπολέξη της x_i για κάθε $i = 1, \dots, n$;

Δείξτε ότι το πρόβλημα αυτό ανήκει στην κλάση $W[P]$. (Αν η άσκηση σας φαίνεται πολύ εύκολη, μπορείτε να δείξετε επιπλέον ότι ανήκει στην κλάση $W[1]$ ή έστω στην κλάση $W[2]$.)

3. Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα:

ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ	
Είσοδος:	Γράφημα G και φυσικός k .
Παράμετρος:	k .
Ερώτηση:	Έχει το G εναγόμενο ταίριασμα μεγέθους $\geq k$;

Δείξτε ότι το πρόβλημα αυτό είναι $W[1]$ -πλήρες.

4. Θεωρήστε τα ακόλουθα προβλήματα:

ΠΟΛΥΧΡΩΜΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ	
Είσοδος:	Γράφημα $G = (V, E)$, φυσικός k και διαμέριση V_1, \dots, V_k του V .
Παράμετρος:	k .
Ερώτηση:	Έχει το G ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k που να περιέχει ακριβώς μία κορυφή από κάθε V_i , $i = 1, \dots, k$;

ΕΝΑΓΩΜΕΝΟ ΜΟΝΟΠΑΤΙ	
Είσοδος:	Γράφημα G , φυσικός k .
Παράμετρος:	k .
Ερώτηση:	Περιέχει το G εναγόμενο μονοπάτι μήκους $\geq k$;

Δείξτε ότι τα προβλήματα αυτά είναι $W[1]$ -δύσκολα.

5. Θεωρήστε τα ακόλουθα προβλήματα:

ΠΕΡΙΤΤΟ ΣΥΝΟΛΟ	
Είσοδος:	Οικογένεια συνόλων \mathcal{A} , με στοιχεία από το U , και φυσικός k .
Παράμετρος:	k .
Ερώτηση:	Υπάρχει $H \subseteq U$ τέτοιο ώστε $ H = k$ και $ H \cap S = 1 \pmod 2$ για κάθε $S \in \mathcal{A}$;

ΑΡΤΙΟ ΣΥΝΟΛΟ	
Είσοδος:	Οικογένεια συνόλων \mathcal{A} , με στοιχεία από το U , και φυσικός k .
Παράμετρος:	k .
Ερώτηση:	Υπάρχει $H \subseteq U$ τέτοιο ώστε $ H = k$ και $ H \cap S = 0 \pmod 2$ για κάθε $S \in \mathcal{A}$;

Δείξτε ότι τα προβλήματα αυτά είναι $W[1]$ -δύσκολα.

6. Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα:

ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ	
Είσοδος:	Γραφήματα G και H , όπου το H έχει k -κορυφές.
Παράμετρος:	k .
Ερώτηση:	Υπάρχει υπογράφημα του G ισόμορφο με το H ;

Δείξτε ότι το πρόβλημα αυτό είναι $W[1]$ -δύσκολο.

7. Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα:

ΠΑΚΕΤΑΡΙΣΜΑ ΣΥΝΟΛΩΝ	
Είσοδος:	Οικογένεια συνόλων \mathcal{A} , με στοιχεία από το U , και φυσικός k .
Παράμετρος:	k .
Ερώτηση:	Υπάρχουν $\geq k$ ξένα ανά δύο σύνολα στην \mathcal{A} ;

Δείξτε ότι το πρόβλημα αυτό είναι W[1]-δύσκολο.

8. Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα:

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟΥ	
Είσοδος:	Ακέραιοι a_1, \dots, a_n, s, k .
Παράμετρος:	k .
Ερώτηση:	Υπάρχει $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, με $ I = k$, τέτοιο ώστε $\sum_{i \in I} a_i = s$;

Δείξτε ότι το πρόβλημα αυτό είναι W[1]-δύσκολο.

9. Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα:

$K_{1,4}$ -ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΣΥΝΟΛΟ ΚΥΡΙΑΡΧΙΑΣ	
Είσοδος:	Γράφημα G που δεν περιέχει το $K_{1,4}$ σαν εναγόμενο υπογράφημα και φυσικός k .
Παράμετρος:	k .
Ερώτηση:	Έχει το G σύνολο κυριαρχίας μεγέθους $\leq k$;

Δείξτε ότι το πρόβλημα αυτό είναι W[2]-δύσκολο.

10. Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα:

ΔΕΝΤΡΟ STEINER	
Είσοδος:	Γράφημα $G = (V, E)$, φυσικοί k, m και $S \subseteq V$, με $ S = k$.
Παράμετρος:	k .
Ερώτηση:	Υπάρχει σύνολο $T \subseteq (V \setminus S)$, με $ T = m$, τέτοιο ώστε το γράφημα που ενάγουν οι κορυφές του $S \cup T$ να είναι συνεκτικό;

Δείξτε ότι το πρόβλημα αυτό είναι W[2]-δύσκολο.