Λογική

Ορισμος

(Μαθηματική / Λογική) Πρόταση είναι μια φράση η οποία είναι είτε αληθής είτε ψευδής — όχι και τα δύο —

Π.χ. $2+2=3$ ✓ μαθηματική πρόταση

$z+2=3$ ✗

Ορισμός

Ταυτολογία αν είναι πάντα αληθεια

1 ή A ή T
αληθής true

Αντίφαση αν πάντα ψευδής

0 ή Ψ ή F
ψευδής false

Συμβολισμός: Γράμματα p, q, r

p = "Χθες έβρεξε"

Πράξεις

- Άρνηση της p : $\overline{p}$ ή $\neg p$ (NOT)
- Σύζευξη (και, and) : $p \wedge q$ ισχύει όταν και το p και το q αληθή
- Διάζευξη (ή, or) : $p \vee q$ ισχύει όταν ή το p ή το q αληθές

$$\underbrace{\underbrace{(1+1=2)}_{A} \vee \underbrace{(2+3=7)}_{\Psi}}_{A}$$

$$\overline{(\text{"χθες έβρεξε"}) \wedge (\text{"πήγα στη σχολή"})}$$

$$\|$$

"χθες δεν έβρεξε" $\vee$ "δεν πήγα στη σχολή"

$$p \wedge q \qquad \neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$$

$$(\overline{p \wedge q}) = \overline{p} \vee \overline{q}$$

- Αποκλειστική Διάζευξη (είτε-είτε, xor)

$$p \oplus q$$

ισχύει όταν ακριβώς ένα εκ των p, q είναι αληθές

Πίνακας αλήθειας (Περιπτώσεις)

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	T	F	T	T

$\overline{p} \vee q$

Συνεπαγωγή

Αν $\overbrace{p}^{\text{υπόθεση}}$ τότε $\overbrace{q}^{\text{συμπέρασμα}}$: $p \to q$

q αν p

Αν	$1=1$	τότε	$2=2$	Α
Αν	$1=1$	τότε	$1=2$	Ψ
Αν	$0=1$	τότε	$1=1$	Α
Αν	$0=1$	τότε	$1=2$	Α

αν	Ψ	τότε	Α	Α
αν	Α	τότε	Ψ	Ψ

Ισοδυναμία

p $\underbrace{\text{αν και μόνο αν}}_{\substack{\text{ανν} \\ \text{iff}}}$ q : $p \leftrightarrow q$

Θεώρημα: $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \to q) \land (q \to p)]$

Απόδειξη

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \land (q \to p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

\lor \land

Παιχνίδι με τη σοκολάτα (2, 5, 7)

P_i : Έχω στρατηγική νίκης αν υπάρχουν i κομμάτια και παίζω πρώτος

P_i αν και μόνο άν $\overline{P_{i-2}} \vee \overline{P_{i-5}} \vee \overline{P_{i-7}}$

$i=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_i	F	F	T	T	F	T	T	T	T	T	F

Παραδείγματα μετατροπής φυσικής γλώσσας σε προτασιακή λογική

Μπορείτε να έχετε πρόσβαση στο internet αν σπουδάζετε Πληροφορική ή αν δεν είστε νέοι φοιτητές.

p = "Μπορώ να έχω πρόσβαση στο internet"
q = "Σπουδάζω πληροφορική"
r = "Είμαι νέος φοιτητής"

$$(q \vee \bar{r}) \to p$$

Μπορείτε να έχετε πρόσβαση στο internet μόνο αν σπουδάζετε Πληροφορική ή αν δεν είστε νέοι φοιτητές.

$$p \to (q \vee \bar{r}) \equiv p \to (r \to q)$$

Αν p τότε q $\qquad p \to q$

q αν p

q μόνο αν p $\qquad q \to p$

Προτεραιότητα

$\neg$ Άρνηση	υψηλότερη
$\land$, $\lor$, $\oplus$	μεσαία
$\to$, $\leftrightarrow$, $\leftarrow$	χαμηλότερη

$p \land \neg r \to q$ $\qquad (p \land (\neg r)) \to q$

Γρίφος

Δυο φυλές — Ιππότες : Λένε αλήθεια
— Κλέφτες : Λένε ψέματα

Ερωτ: Υπάρχει χρυσός στο νησί;
Απάντηση: Υπάρχει ανν λέω την αλήθεια

Υπάρχει χρυσός στο νησί;

Λύση

X : Υπάρχει χρυσός
A : Λέω την αλήθεια

Η απάντηση p ήταν $X \leftrightarrow A$

Απο τα δεδομένα
αν πάρω απάντηση P
Η P είναι αλήθεια αν και μόνο αν A

$A \leftrightarrow P$ είναι αληθής

$\equiv$

$A \leftrightarrow (A \leftrightarrow X)$ είναι αληθής

$\equiv$

X είναι αληθής

A	X	$A \leftrightarrow X$	$A \leftrightarrow (A \leftrightarrow X)$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Γρίφος 2

Τρία άτομα

Α, Β, Γ

— Ιππότης : Λέει αλήθεια
— Κλέφτης : Λέει ψέματα
— Τεχνίτης : Λέει αλήθεια ή ψέματα

Α — Εγω είμαι ο τεχνίτης
Β — Εγώ είμαι ο τεχνίτης
Γ — Ο Α είναι ο τεχνίτης

Α	Β	Γ	Εγω είμαι τεχνίτης	Εγώ είμαι τεχνίτης	Ο Α είναι τεχνίτης
Ι	Κ	Τ	✗	✓	✓
Ι	Τ	Κ	✗		✓
Κ	Ι	Τ	✓	✗	
Κ	Τ	Ι	✓		✗
Τ	Κ	Ι	✓	✓	✓
Τ	Ι	Κ		✗	

Ιδιότητες

$$\neg(\neg p) \equiv p$$
$$p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \equiv q$$

$$p \to q \equiv \overline{p} \vee q$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

Αντίθετο ανάστροφος

$$p \to q \equiv \overline{q} \to \overline{p}$$

$$p \leftrightarrow q \equiv \overline{q} \leftrightarrow \overline{p}$$

$$p \wedge 1 \equiv p$$
$$p \vee 1 \equiv 1$$
$$p \wedge 0 \equiv 0$$
$$p \vee 0 \equiv p$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

De Morgan

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Μέχρι τώρα είδαμε

- Προτάσεις
- Μετατροπή από φυσική γλώσσα σε μαθηματική
- Ισοδυναμία Προτάσεων
    - Πίνακας τιμών
    - ιδιότητες
- Επίλυση γρίφων

<u>Ορισμός</u>

Κατηγόρημα είναι μια λογική πρόταση της οποίας η αλήθεια εξαρτάται απο την τιμή 1 ή περισσότερων μεταβλητών

π.χ. $\underbrace{P(x)}_{\text{προτασιακή συνάρτηση}} : \overbrace{x > 3}^{\text{κατηγόρημα}}$

$P(1)$ ψευδές ενώ $P(4)$ αληθές

$P(3)$ ψευδές

π.χ. $Q(x,y)$: $\overbrace{x+y>3}^{\text{κατηγόρημα}}$

$Q(2,5)$ T

$Q(2,1)$ F

<u>Ποσοδείκτες</u>

- Υπαρξιακός Ποσοδείκτης

$\underbrace{\exists x : P(x)}$

Υπάρχει x έτσι ώστε να ισχύει η $P(x)$

π.χ. $\exists x : x>4$ T γιατί για $x=5$ $5>4$

$\exists x \underbrace{\in \mathbb{R}}_{\text{πεδίο ορισμού}} : x \notin \mathbb{Q}$ T γιατί $x=\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\exists x \in \{1,2,3\} : x^2 > 10$ F

$\exists x \in \{T,F\}, y \in \{T,F\} : \underbrace{x \land y}_{\text{κατηγόρημα}}$ T

$\exists x,y \in \{T,F\}$

$$\underbrace{\exists x \in \{T,F\} : \underbrace{\left(\exists y \in \{T,F\} : \underbrace{x \wedge y}_{\text{κατηγόρημα}} \right)}_{\text{κατηγόρημα}}}_{\text{πρόταση}}$$

- Μοναδική ύπαρξη

$\exists!\ x : P(x)$ υπάρχει μοναδικό x τέτοιο ώστε $P(x)$

$\exists!\ x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$ F

$\exists!\ x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$ F

$\exists!\ x \in \mathbb{R} : x^2 = 0$ T

$\exists!\ x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x^2 = 4$ T

$\exists!\ x, y \in \{0,1\} : \neg (x \to y)$ T

$x = 1$ $y = 0$

x	y	$x \to y$	$\neg(x \to y)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

- Καθολικός Ποσοδείκτης

$\forall x : P(x)$

Για κάθε x (σε κάποιο πεδίο ορισμού) ισχύει η $P(x)$

Π.χ. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ T

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$ F

$\forall x : x^2 \geq 0$ F $x = i$

$\forall n$ περιττός ακέραιος : n^2 περιττός T

Αληθής γιατί $n = 2k+1$ όπου k ακέραιος

άρα $n^2 = (2k+1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$ περιττός

γιατί $n^2 = 2\lambda + 1$

με $\lambda = 2k^2 + 2k$

Άρνηση ποσοδεικτών

$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$

$\neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \neg P(x)$

DeMorgan

$P(x)$

$$\neg(\forall x \in \{1,2,3\} : x^2 < 10) \qquad F$$
$$\exists x \in \{1,2,3\} : x^2 \geq 10 \qquad F$$

$$\forall x \in \{1,2,3\} : P(x)$$
$$\equiv P(1) \land P(2) \land P(3)$$

$$\neg(\forall x \in \{1,2,3\} : P(x))$$
$$\equiv \exists x \in \{1,2,3\} : \overline{P(x)}$$
$$\equiv \overline{P(1)} \lor \overline{P(2)} \lor \overline{P(3)}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\forall x \in S : P(x) \\ \equiv \\ \bigwedge_{x \in S} P(x) \equiv P(1) \land P(2) \land \ldots\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\exists x \in S : P(x) \\ \equiv \\ \bigvee_{x \in S} P(x) \equiv P(1) \lor P(2) \lor P(3) \lor \ldots\end{gathered}}$$

π.χ. $\forall n \in \mathbb{N}$: $n!+1$ είναι πρώτος

F

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

$1! = 1 \rightarrow 1+1 = 2$

$2! = 1 \cdot 2 = 2 \rightarrow 2+1 = 3$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow 6+1 = 7$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \rightarrow 24+1 = 25$

$\exists n \in \mathbb{N}$: $n!+1$ να μην είναι πρώτος

π.χ. $n = 4$

T

Ικανοποιησιμότητα (SAT isfiability)

Για ένα κατηγόρημα, υπάρχουν τιμές που το κάνουν αληθές;

$$\exists\, x_1, x_2, x_3 : P(x_1, x_2, x_3)$$

$$p, q, r \in \{0, 1\}$$

Πχ. $P(p, q, r) =$

$$(p \lor \neg q) \land (q \lor \neg r) \land (r \lor \neg p) \land \bar{p} \land r$$

$p = 0$ $\quad q = 0$ $\quad r = 0$

$p = 1$ $\quad q = 1$ $\quad r = 1$ $\quad \times$

$$\boxed{P \overset{?}{=} NP}$$

Sudoku

Ορίζουμε μεταβλητές $x_{ijv} \in \{T, F\}$

Αν $x_{ijv} = T$ τότε στη θέση (i,j) η τιμή είναι v

$x_{173} = T$ αν $(1,7)$ έχει τιμή 3

- Στη γραμμή 1 υπάρχει ο αριθμός 1

$$\underbrace{x_{111} \vee x_{121} \vee x_{131} \vee \dots \vee x_{191}}_{\bigvee_{j=1}^{9} x_{1j1}}$$

Για κάθε γραμμή i
και κάθε τιμή v
$\exists\, j \in \{1, \dots, 9\} \quad x_{ijv}$

$$\bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{v=1}^{9} \left(\bigvee_{j=1}^{9} x_{ijv} \right)$$

- Αντίστοιχα $$\bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{v=1}^{9} \left(\bigvee_{i=1}^{9} x_{ijv} \right)$$

  Για κάθε στήλη j υπάρχει ο αριθμός v

- Για κάθε 3×3 τετράγωνο T και κάθε τιμή v

  $$\exists (i,j) \in T : x_{ijv}$$

- Σε κάθε κελί i,j να υπάρχει μοναδικό v ώστε x_{ijv}

  $\exists! v : x_{ijv}$

  Για κάθε i j κάθε v και v' όπου $v \neq v'$

  $$\overline{x_{ijv}} \vee \overline{x_{ijv'}}$$

- Δοσμένα κελιά $(1,1) \rightarrow 3$

  $x_{1,1,3} = T$

Ποσοτικοποίηση 2 ή περισσότερων μεταβλητών

$$\forall x \ \forall y : P(x,y)$$

αληθής αν ισχύει για κάθε ζεύγος (x,y)

$$\equiv$$

$$\forall y \ \forall x : P(x,y)$$

$$\equiv \ \forall x,y : P(x,y)$$

$$\not\equiv$$

$$\forall x \ \forall y : P(y,x)$$

$$\exists x \ \exists y : P(x,y)$$

αληθής αν ισχύει για τουλάχιστον 1 ζεύγος (x,y)

$$=$$

$$\exists y \ \exists x : P(x,y)$$

$$\equiv$$

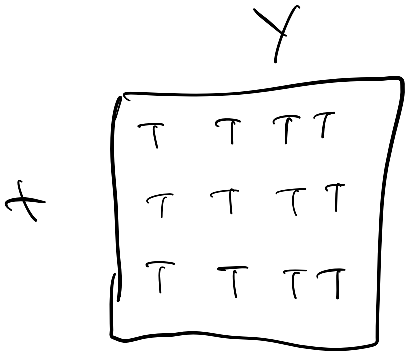
$$\exists x,y : P(x,y)$$

$$\equiv$$

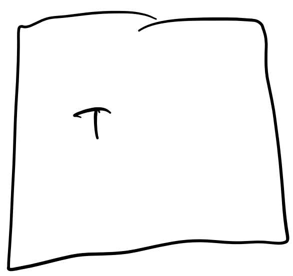
$$\exists y : (\exists x : P(x,y))$$

$\forall x : \exists y : P(x,y)$

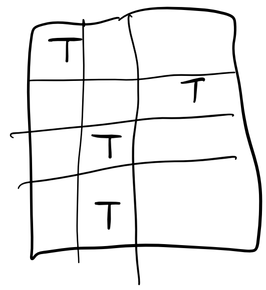
Για κάθε x υπάρχει τουλάχιστον 1 y ώστε $P(x,y)$



$\forall x \forall y$



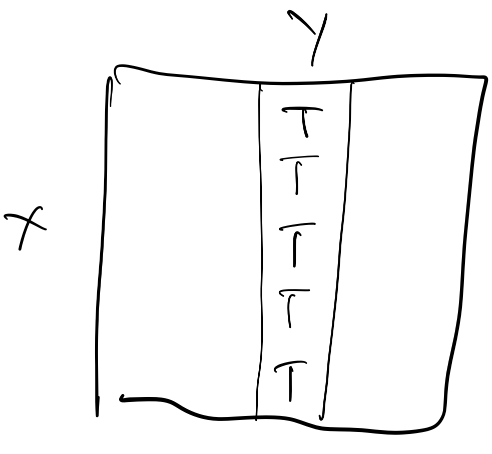
$\exists x \exists y$

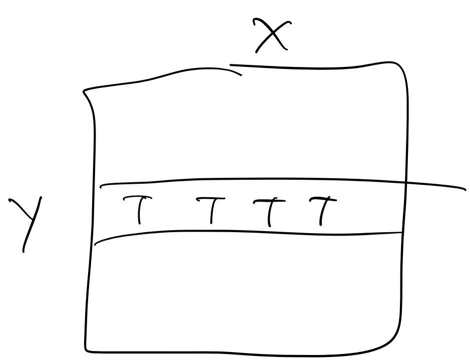


$\forall x \exists y$

$\exists y \forall x : P(x,y)$

Υπάρχει y ώστε για κάθε x να ισχύει η $P(x,y)$





$$\exists y\, \forall x : P(x,y) \not\equiv \forall x\, \exists y : P(x,y)$$

$$|||$$

$$\exists x\, \forall y : P(y,x)$$

π.χ. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y, z \in \mathbb{R} : x = y + z$

Αληθής ό,τι x να έχω και $z = x - y$

$$\exists y, z \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : x = y + z$$

Ψευδής όποια y και z πρέπει

$$0 = y + z$$

και $1 = y + z$

$$2 = y + z$$

$$\vdots$$

$\exists y^{\in \mathbb{R}} \forall x \in \mathbb{R} : \quad x \cdot y = 0$

Αληθής $\quad y = 0$

Πρόταση : κάθε πραγματικός αριθμός $x \neq 0$ έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο

$\forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0} \ \exists y \in \mathbb{R}_{\neq 0} : \quad x \cdot y = 1$

Αληθής γιατί για κάθε x μπορώ να διαλέξω $y = \frac{1}{x}$

$\boxed{\exists y \ \forall x : \quad x \cdot y = 1}$ ψευδής

Η άρνηση της πρότασης

$\neg \left(\forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0} \ \exists y \in \mathbb{R}_{\neq 0} : \ x \cdot y = 1 \right)$

$\exists x \in \mathbb{R}_{\neq 0} : \neg \left(\exists y \in \mathbb{R}_{\neq 0} : \ x \cdot y = 1 \right)$

$\exists\, x \in \mathbb{R}_{\neq 0} : \forall\, y \in \mathbb{R}_{\neq 0} : \neg (x \cdot y = 1)$

$\exists\, x \in \mathbb{R}_{\neq 0} \ \forall\, y \in \mathbb{R}_{\neq 0} : x \cdot y \neq 1$

Πρόταση: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\exists$ πρώτος p
τέτοιος ώστε $n < p \leq n! + 1$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$

	n		$n!+1$	
$n=1$	$1 < p$		≤ 2	$p=2$
$n=2$	$2 < p$		$\leq 1.2+1=3$	$p=3$
$n=4$	$4 < p$		≤ 25	$p=7$ ή $p=5$

Απόδειξη: Θα δείξω ότι για κάθε n
υπάρχει p πρώτος
στο διάστημα $n < p \leq n! + 1$

Αν $n! + 1$ είναι πρώτος

τότε $p = n! + 1$

Αλλιώς ($n!+1$ δεν είναι πρώτος)

τότε υπάρχει q πρώτος

με $2 \leq q < n!+1$

που διαιρεί το $n!+1$

Θα δείξω ότι $q > n$

Έστω ότι $2 \leq q \leq n$

τότε το q διαιρεί το $n!$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q \cdots n$

αλλά το q διαιρεί και το $n!+1$

άτοπο

Άρα $q > n$

Τότε θέτω $p = q$ $\square$

Ορισμός

Επιχείρημα είναι μια ακολουθία προτάσεων
Η τελική πρόταση λέγεται **συμπέρασμα**

Ορθα επιχειρήματα / Κανόνες

- Modus Ponens

$$p \wedge (p \to q) \to q$$

- Modus Tollens

$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$$

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q} \\ \therefore\ q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore\ \neg p \end{array}$$

- Υποθετικός συλλογισμός

$$(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$$

- Διαζευκτικός συλλογισμός

$$(p \lor q) \land \neg p \to q$$

- Επίλυση

$$(p \lor q) \land (\neg p \lor r) \to (q \lor r)$$

$$(\neg p \to q) \land (p \to r) \to (q \lor r)$$

Π.χ. — Δεν έχει ήλιο σήμερα και ο καιρός είναι κρύος

— Θα πάμε για μπάνιο μόνο αν έχει ήλιο

∴ Δεν θα πάμε για μπάνιο

$H \equiv$ "Έχει ήλιο σήμερα"

$K \equiv$ "Ο καιρός είναι κρύος"

$M \equiv$ "Θα πάμε για μπάνιο"

$$\begin{array}{l} \neg H \land K \\ H \leftarrow M \\ \hline \therefore \neg M \end{array}$$

$$H \rightarrow M$$
$$H \leftarrow M$$
$$H \leftrightarrow M$$

Modus Tollens

Ποσοδείκτες

- καθολική εφαρμογή

$$\forall x : P(x) \Rightarrow P(c)$$

για όποια τιμή c θέλω στο πεδίο ορισμού

- Υπαρξιακή γενίκευση

$$P(c) \Rightarrow \exists x : P(x)$$

για κάποια τιμή c

- Υπαρξιακή εφαρμογή

$$\exists x : P(x) \Rightarrow P(c)$$

για κάποιο c που δεν γνωρίζω αναγκαία ποιο είναι

Π.χ. — Όσοι είναι στο πρώτο έτος παρακολουθούν Διακριτά
— Η Μαρία είναι στο 1ο έτος
∴ Η Μαρία παρακολουθεί Διακριτά

$p(x)$: " Ο x είναι στο πρώτο έτος"
$q(x)$: " Ο x παρακολουθεί Διακριτά"

$$\frac{\forall x : p(x) \to q(x) \qquad p(\text{"Μαρία"})}{}$$

$\therefore\ p(\text{"Μαρία"}) \to q(\text{"Μαρία"})$

$\therefore\ q(\text{"Μαρία"})$

Απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης P

Τεκμηρίωση της αλήθειας της P με βάση κάποια αξιώματα ή υποθέσεις.

Μέθοδοι Αποδείξεων

- Ευθεία Απόδειξη

$Y \to Q \to P$

Αρκεί να δείξω και ισοδυναμίες

$Y \leftrightarrow Q \to P$

π.χ. $\forall$ n περιττός ακέραιος : n^2 περιττός

n περιττός $\Rightarrow$ $\exists\, \lambda$ ακέραιος : $n = 2\lambda + 1$

$\Rightarrow$ $n^2 = (2\lambda+1)^2 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1$

$= 2(2\lambda^2 + 2\lambda) + 1$

$\Rightarrow$ $\exists\, k$ ακέραιος : $n^2 = 2k+1$

$\Rightarrow$ n^2 είναι περιττός

- Έμμεση απόδειξη / απαγωγή σε άτοπο

$\neg P \to \dots \to \neg Y$ (αντίθετο αντίστροφο)

π.χ. $\forall$ n ακέραιος (θετικός) : n^2 είναι περιττός
$\rightarrow$ n είναι περιττός

Ευθεία απόδειξη

n^2 περιττός $\Rightarrow$ $n^2 = 2k+1$ για κάποιο k
$\Rightarrow n = \sqrt{2k+1}$? ? ?

Απόδειξη
Με άτοπο
$\neg P$

Έστω n όχι περιττός άρα άρτιος
$\Rightarrow$ $n = 2\lambda$ για κάποιο ακέραιο λ
$\Rightarrow$ $n^2 = 4\lambda^2 = 2(2\lambda^2)$
$\Rightarrow$ $n^2 = 2k$ για κάποιο k ακέραιο
$\Rightarrow$ n^2 άρτιος άτοπο γιατί από την υπόθεση n^2 περιττός $\square$

- Υπαρξιακή απόδειξη ή αντιπαράδειγμα

π.χ. Να εξετάσετε αν ισχύει

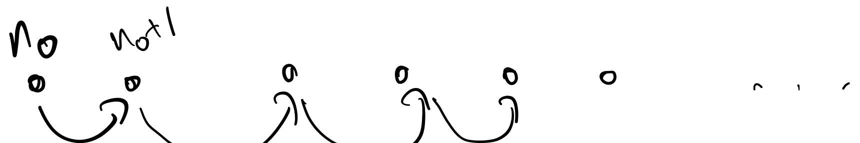
$\forall n \in \mathbb{N}$: n γράφεται σαν άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων

$$1 = 1^2 + 0^2 + 0^2$$
$$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2$$
$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$$
$$4 = 2^2 + 0 + 0$$
$$5 = 2^2 + 1^2 + 0$$

Το 7 είναι αντιπαράδειγμα
δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα
τριών αριθμών $\{0, 1, 4\}$

- Επαγωγή : $\forall n \geq n_0 : P(n)$

Αρκεί να δείξω $P(n_0)$
και $\forall k \geq n_0 : P(k) \Rightarrow P(k+1)$



Στρατηγικές Αποδείξεων

1α Απαρίθμηση Περιπτώσεων / Εξαντλητική Απόδειξη

$$Y \equiv Y_1 \vee Y_2 \vee Y_3 \vee \dots \vee Y_n \longrightarrow P$$

αρκεί να δείξω

$Y_1 \rightarrow P$

$Y_2 \rightarrow P$

$\vdots$

$Y_n \rightarrow P$

πχ. $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 \geq n$

Εξετάζω περιπτώσεις

$n \in \mathbb{Z}$ ισοδύναμα $(n=0) \vee (n>0) \vee (n<0)$

- Περίπτωση $n=0$ τότε $0^2 \geq 0$ ✓
- Περίπτωση $n<0$ τότε $n^2 \geq 0$ αλλά $n<0$

$n^2 > n \Rightarrow n^2 \geq n$

- Περίπτωση $n > 0$ τότε $n \geq 1$

$\times n$

$n^2 \geq n$ ✓

1β Αντίστροφος συλλογισμός

$Y \rightarrow P$ αρκεί $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow Y$

π.χ. Για θετικούς ακεραίους x, y με $x \neq y$ ο αριθμητικός μέσος (AM) είναι μεγαλύτερος από τον γεωμετρικό μέσο (ΓΜ)

$$(AM) > (\Gamma M)$$

$$(AM) = \frac{x+y}{2} \qquad \Gamma M = \sqrt{xy}$$

π.χ. $x = 3$ $y = 5$

$$(AM) = \frac{3+5}{2} = 4 = \sqrt{16}$$
$$(\Gamma M) = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$$

$$(AM) > (\Gamma M) \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{4} > xy$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2 > 4xy$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy > 4xy$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2xy>0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-y)^2>0 \quad \checkmark$$ γιατί $x \neq y$

2. Εις άτοπο απαγωγή

π.χ. Ν.δ.ο. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (είναι άρρητος)

Απόδειξη Έστω $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{N}$ όπου ο $\text{ΜΚΔ}(a,b)=1$

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (ελαχίστων όρων)

$$\frac{10}{15} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow \sqrt{2}^2 = \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow \underbrace{2b^2 = a^2}$ $\Rightarrow$ a^2 άρτιος

$\Rightarrow$ a άρτιος

$\Rightarrow$ $a=2\lambda$, $2b^2=4\lambda^2$

$\Rightarrow$ $b^2=2\lambda^2 \Rightarrow b$ άρτιος

– Αν a είναι περιττός, άτοπο γιατί a^2 είναι περιττός αλλά $2b^2$ άρτιος

– Αν a είναι άρτιος: $\underline{a=2\lambda}$

$$2b^2 = (2\lambda)^2 = 4\lambda^2$$
$$\Rightarrow b^2 = 2\lambda^2$$

άρα b^2 άρτιος $\Rightarrow$ b άρτιος

άτοπο γιατί $\frac{a}{b}$ ελαχίστων όρων $\square$

Π.χ. Αν έχουμε 37 άτομα, τουλάχιστον 4 έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα.

Απόδειξη με άτοπο

Έστω ότι υπάρχουν το πολύ 3 άτομα για κάθε μήνα

μήνες

$\Rightarrow$ Υπάρχουν <u>το πολύ</u> $3 \cdot 12$ άτομα

36 άτομα

άτοπο

3. Υπαρξιακή απόδειξη $\exists x : P(x)$

- Κατασκευαστική

π.χ. $\exists\, n \in \mathbb{N}$ που γράφεται ως άθροισμα 2 κύβων με 2 τρόπους

$$n = a^3 + b^3 = c^3 + d^3$$

με $a \leq b$ $\quad a \neq c$

$c \leq d$ $\quad b \neq d$

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

- Μη κατασκευαστικές

π.χ. $\exists\, x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x^y \in \mathbb{Q}$

Απόδειξη

Έστω $x = y = \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Αν $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι ρητός ✓

Διαφορετικά $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$y = \sqrt{2}$

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \quad ✓ \quad \square$$

Ν.δ.ο. $\nexists\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ τ.ω. $n^2+n^3=100$

Απόδειξη

Αν $n \geq 5$, $n^2+n^3 \geq 5^2+5^3 = 125+25$
$=150 > 100$

Αν $n \leq 4$

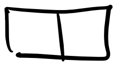
- $n=0$ $0^2+0^3=0$
- $n=1$

$\vdots$

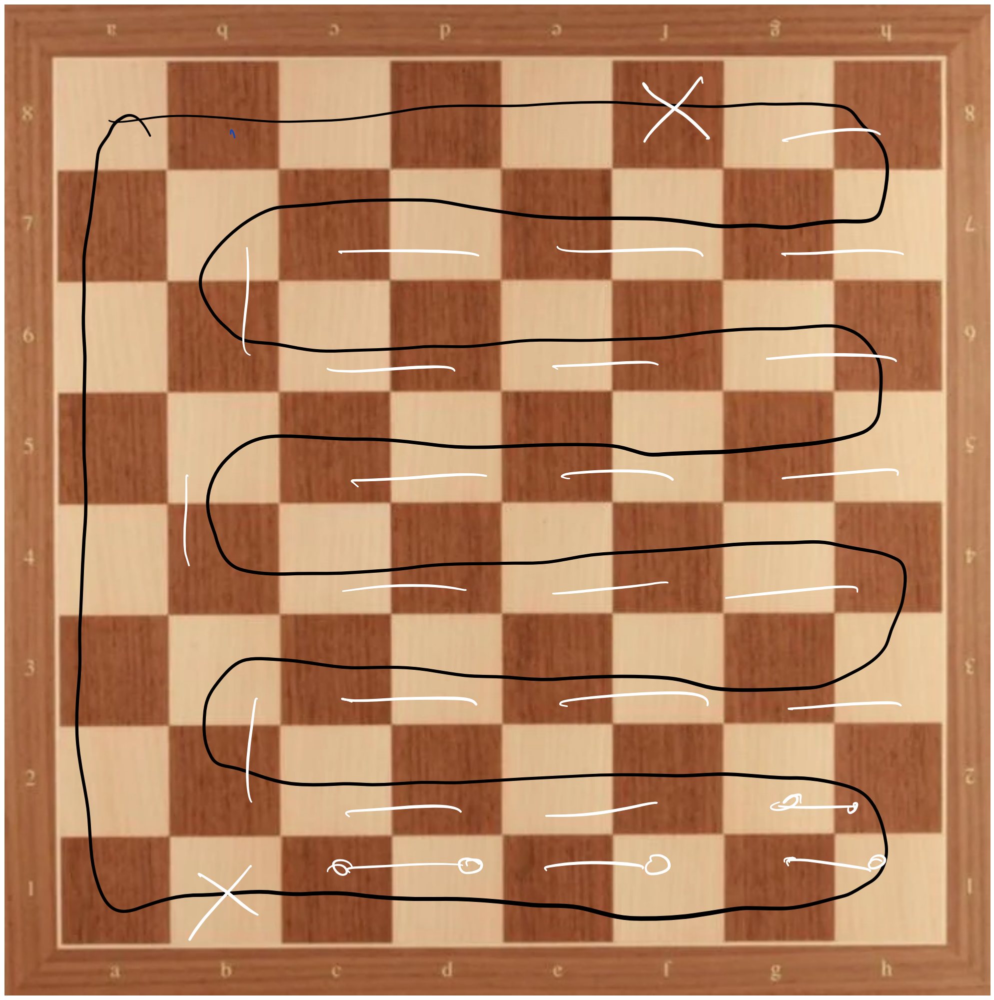
$n \leq 4$ $n^2+n^3 \leq 4^2+4^3 \leq$
$16+64$
$=80 < 100$

$\square$

Ντόμινο στη σκακιέρα



Ν.δ.ο. μπορώ να καλύψω τη σκακιέρα με 2x1 ντόμινο



Κατασκευαστικά

Καλύπτω την πρώτη γραμμή και κάθε γραμμή με τον ίδιο τρόπο

Γίνεται να καλύψω άλλη τη σκακιέρα πέρα από 1 τετράγωνο;

Δεν γίνεται γιατί τα ντόμινο καλύπτουν πάντα άρτιο αριθμό

κελιών αλλά αν λείπει 1 υπάρχουν συνολικά 63 (περιττός)

Αν λείπουν 2 άσπρα κουτάκια δεν γίνεται να καλυφθεί η σκακιέρα γιατί τα ντόμινο καλύπτουν τον ίδιο αριθμό απο άσπρα και μαύρα.