Αρχές απαρίθμησης

- Συνδυαστική: Μελετάει την απαρίθμηση διαφορετικών αντικειμένων
- Ορισμός: Πείραμα είναι μια διαδικασία με συγκεκριμένο πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων
- Στόχος: Να απαριθμήσουμε όλα τα πιθανά αποτελέσματα

Παράδειγμα

- Password: 6, 7 ή 8 χαρακτήρες

Χαρακτήρας είναι γράμμα ή ψηφίο

Υποχρεωτικά ≥ 1 αριθμητικό ψηφίο

π.χ. aaaaa0

abcde1

⋮

1234567

Χαρακτήρας $= 26+10$
$= 36$

$\underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}$

(Απάντηση για 6) + (Απάντηση 7) + (Απάντηση για 8)

"$36^6 - 26^6$ "$36^7 - 26^7$ "$36^8 - 26^8$

Εφαρμογές

- Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων
- Κρυπτογραφία
- Σχεδιασμός Συστημάτων :
  - Τηλεφωνικοί Αριθμοί
  - IP address
  - Πινακίδες Αυτοκινήτων
- Τυχερά Παιχνίδια

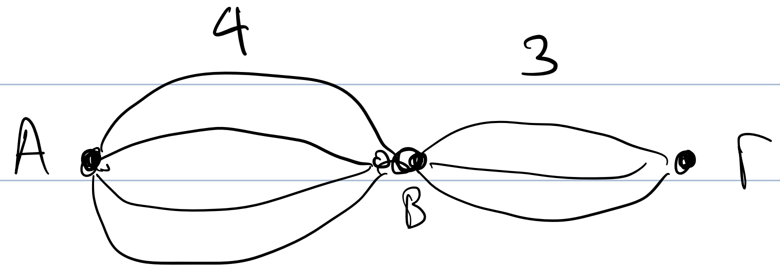
1. Κανόνας του γινομένου

Αν μια διαδικασία διαχωρίζεται σε μια ακολουθία 2 εργασιών
- Αν η πρώτη εργασία έχει a_1 τρόπους εκτέλεσης
- και η δεύτερη a_2 τρόπους εκτέλεσης

Υπάρχουν συνολικά $a_1 \cdot a_2$ τρόποι εκτέλεσης της συνολικής διαδικασίας

Γενικότερα $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$

για n εργασίες



$4 \times 3 = 12$

μονοπάτια από

το A στο Γ

Παράδειγμα: Πόσα πιθανά αποτελέσματα με 2 ζάρια;

$(1,1) \quad (1,2) \quad \cdots$

$(2,1) \quad \cdots$

$\cdots$

$(\underbrace{\quad}_{6 \text{ επιλογές}} , \underbrace{\quad}_{6 \text{ επιλογές}})$

$6 \times 6 = 36$ επιλογές

Παράδειγμα: Πόσες συμβολοσειρές με 0/1 μήκους 9;

0 0 0 0 0 0 0 0 0

1 0 1 0 1 1 1 0 1

⋮

$\underset{2}{\sqcup}\ \underset{2}{\sqcup}\ \underset{2}{\sqcup}\ \dots\ \underset{2}{\sqcup}$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^9 = 512$

Παράδειγμα: Πόσες πινακίδες με 3 ελληνικά γράμματα και 4 νούμερα

ΑΑΑ 0000

ΑΒΓ 1234

⋮

$\underset{24}{\sqcup}\ \underset{24}{\sqcup}\ \underset{24}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}$

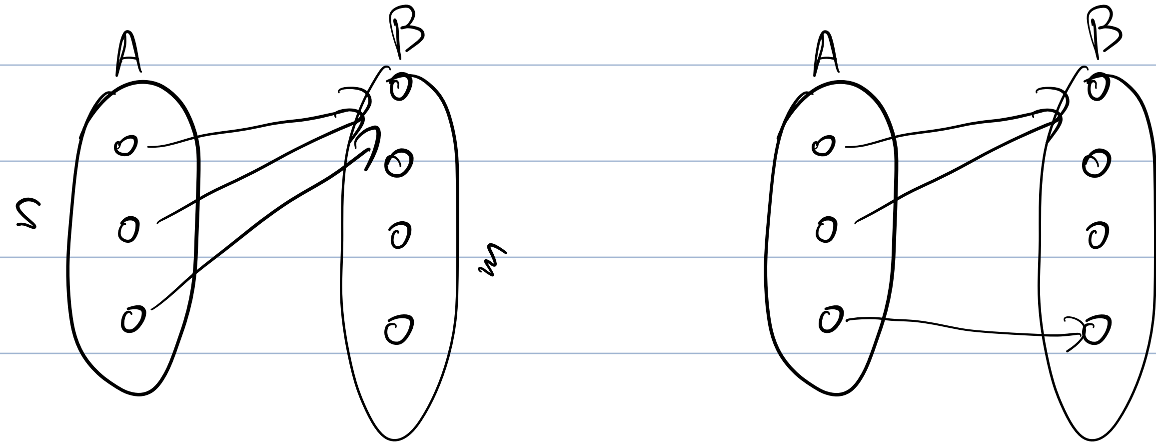
$24^3 \times 10^4 = 138\,240\,000$

α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ σ τ υ φ χ ψ ω

×× × × × × × × ××

$14^3 \cdot 10^4$

Παράδειγμα: Πόσες συναρτήσεις $f : A \to B$ υπάρχουν αν $|A| = n$
$|B| = m$

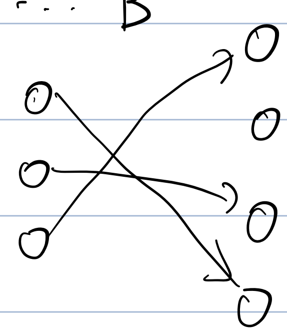


$\underbrace{1\text{ο στοιχείο του } A}_{m \text{ επιλογές}}$ $\quad$ $\underbrace{2\text{ο στοιχείο του } A}_{m \text{ επιλογές}}$ $\quad$ ... $\quad$ $\underbrace{n\text{-οστό του } A}_{m \text{ επιλογές}}$

$m \times m \times m \times \cdots \times m = m^n$

$f \in B^A$ $\qquad$ $\overbrace{B \times B \times \cdots B}^{B^3}$

$(4, 3, 1)$



Συνολοθεωρητική Προσέγγιση

Αν έχουμε σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$
και το πείραμα είναι

$$A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$$
$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \forall i, a_i \in A_i\}$$

$$|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots |A_n|$$

Παράδειγμα: 2 ζάρια έτσι ώστε
το πρώτο ζάρι να μην είναι
ίδιο με το δεύτερο

$\underbrace{\text{1ο νούμερο}}_{\text{6 επιλογές}}$ $\underbrace{\text{2ο νούμερο}}_{\text{5 επιλογές}}$ $6 \times 5 = 30$ επιλογές

Κανόνας του αθροίσματος

Αν μια διαδικασία μπορεί να γίνει είτε με n_1 τρόπους
είτε με n_2 τρόπους
(χωρίς κοινά στοιχεία)
τότε υπάρχουν $n_1 + n_2$ τρόποι εκτέλεσης

Συνολοθεωρητικά

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$
$$= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$
αν $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j$ με $i \neq j$

Παράδειγμα: Επιλογές για πτυχιακή εργασία
- 18 επιλογές για βιβλιογραφική εργασία
- 35 επιλογές για ανάπτυξη κώδικα

$18 + 35 = 53$ επιλογές

Παράδειγμα

Ένας χαρακτήρας είτε ψηφίο
είτε ελληνικό γράμμα

$\#$ χαρακτήρες $= 10 + 24 = 34$

Παράδειγμα: Μπιλιάρδο

15 μπάλες
7 μονόχρωμες
7 δίχρωμες
1 μαύρη

Μια μονόχρωμη και μια δίχρωμη
$7 \times 7 = 49$ (γινόμενο)

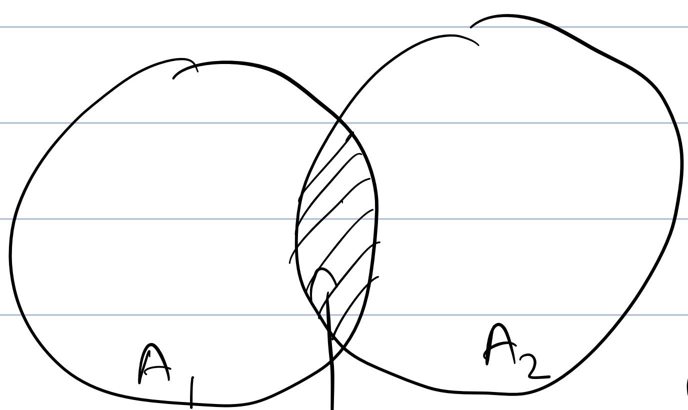
Μια μονόχρωμη ή μια δίχρωμη
$7 + 7 = 14$ (άθροισμα)

Κανόνας της αφαίρεσης

Αν μια διαδικασία μπορεί να γίνει είτε με n_1 τρόπους
είτε με n_2 τρόπους
εκ των οποίων k είναι κοινοί
τότε υπάρχουν $n_1 + n_2 - k$ τρόποι εκτέλεσης

Συνολοθεωρητικά

$$|A_1 \cup A_2| = \underbrace{|A_1| + |A_2|} - |A_1 \cap A_2|$$



$A_1 \cap A_2$

$$|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$$

αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού

$A_1 = \{a, b\}$

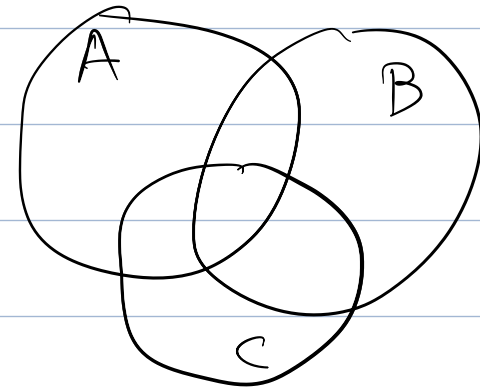
$A_2 = \{b, c\}$

$A_1 \cap A_2 = \{b\}$

$A_1 \cup A_2 = \{a, b, c\}$

$A_1 \oplus A_2 = \{a, c\}$

Για 3 σύνολα



$|A \cup B \cup C| =$

$|A| + |B| + |C|$
$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$
$+ |A \cap B \cap C|$

Παράδειγμα: Πόσοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 1000 δεν είναι πολ/σια ούτε του 2, ούτε του 3 ούτε του 5

$\boxed{1 \ldots 999}$

A_2 = "πολ/σια του 2"
A_3 = "πολ/σια του 3"
A_5 = "πολ/σια του 5"

$$999 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5|$$

$$= 999 - \Big(|A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \Big)$$

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor = 499$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor = 333$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor = 199$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor = 166$$

$$|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor = 99$$

$$|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{15} \right\rfloor = 66$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 499 + 333 + 199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733$$

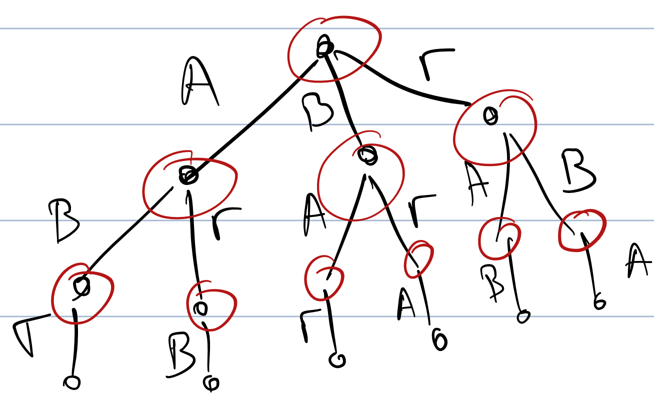
Άρα συνολικά $999 - 733 = 266$ νούμερα.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε 3 άτομα σε μια σειρά;

Α	Β	Γ
Α	Γ	Β
Β	Α	Γ
Β	Γ	Α
Γ	Α	Β
Γ	Β	Α

6 τρόποι

Πρώτο	άτομο	3
Δεύτερο	άτομο	2
Τρίτο	άτομο	1

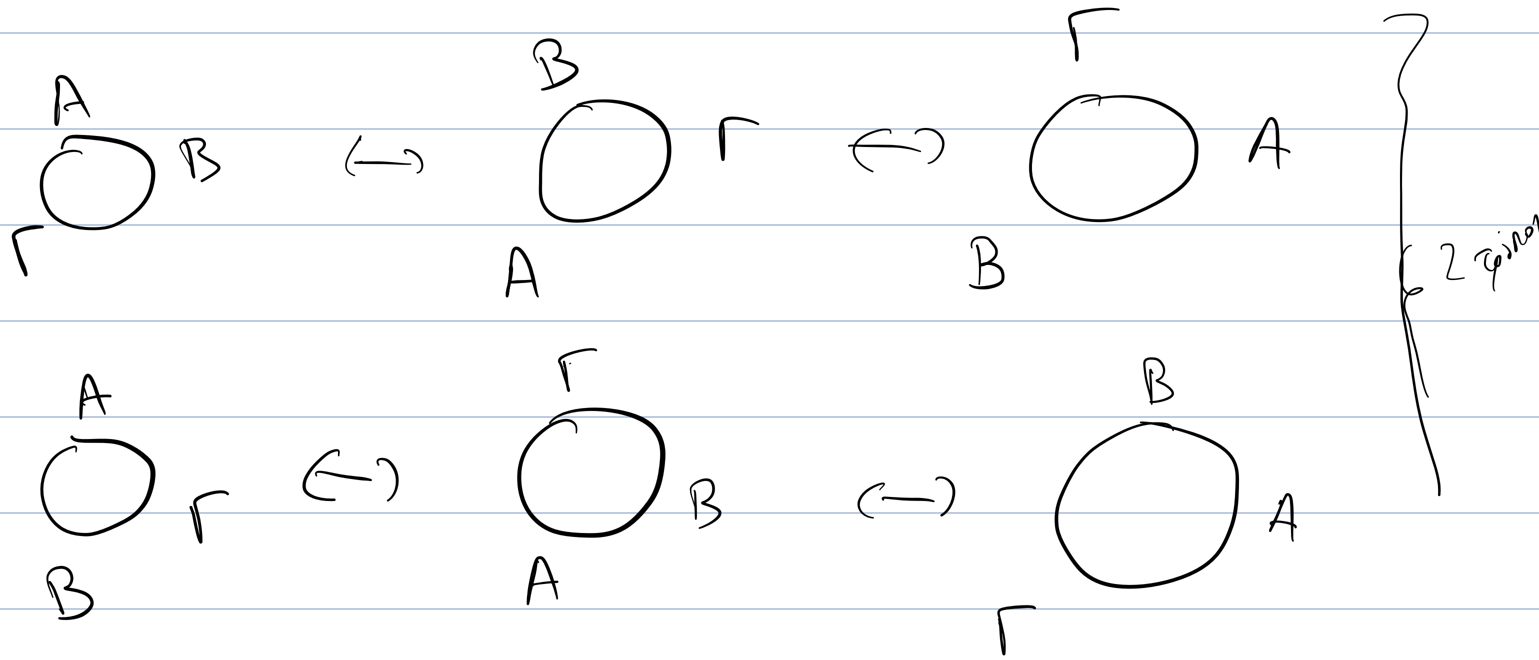


Με 10 άτομα $10!$ τρόποι

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

(Μεταθέσεις)

Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω 3 άτομα σε ένα κύκλο;



$$\frac{3!}{3} = 2$$

Με 10 άτομα

$\frac{10!}{10} = 9!$ τρόποι

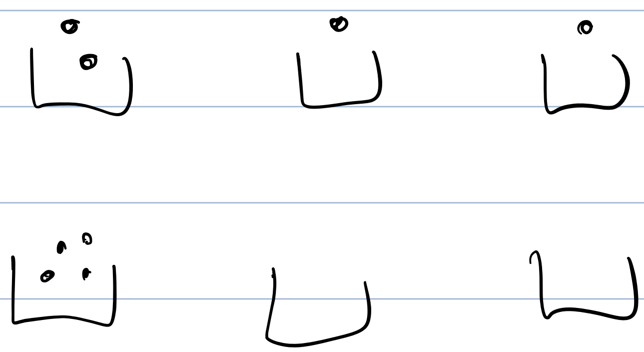
Κάθε τρόπος μετριέται 10 φορές αν τους βάλω σε σειρά

4. Κανόνας της διαίρεσης

Αν έχω ένα τρόπο να μετρήσω το κάθε στοιχείο ακριβώς k φορές, διαιρώντας με το k βρίσκω το πραγματικό πλήθος στοιχείων.

- **Αρχή του Περιστερώνα (Pigeonhole Principle)**

Αν έχουμε $k+1$ αντικείμενα και τα βάλουμε σε k κουτιά τότε υπάρχει τουλάχιστον 1 κουτί με 2 ή περισσότερα αντικείμενα.



Μια συνάρτηση από $k+1$ στοιχεία σε k δεν μπορεί να είναι $1-1$

Άσκηση: Αν σε ένα διαγώνισμα μπαίνουν οι βαθμοί 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, ..., 10 Πόσοι φοιτητές πρέπει να έχω για να υπάρχουν σίγουρα 2 με τον ίδιο βαθμό;
22

$|\{0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 10\}| = 21$
άρα $21 + 1 = 22$ φοιτητές

Άσκηση: Για κάθε ακέραιο n υπάρχει πολ/σιο που αποτελείται μόνο από 0 ή 1.

π.χ. $5 \to 10$
$3 \to 111$
$4 \to 100$
$6 \to 1110$

Θα δείξω ότι ισχύει για κάθε n

Έστω

$$A = \{1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\cdots1}_{n}\}$$

Αν υπάρχει $a \in A$ $a \bmod n = 0$ ✓

Διαφορετικά $\forall a \in A$ $a \bmod n \in \{1, \ldots, n-1\}$

αλλά $|A| = n$

άρα υπάρχουν $a, b \in A$ με $a < b$

$a \bmod n = b \bmod n$

$b = 111111$

$a = 111$

$b-a = 111000$

Τότε το $b-a$

- $(b-a) \bmod n = 0$
- και $b-a$ είναι της μορφής

$111\ldots110\ldots0$

✓

6

$$A = \{\overset{a}{1}, 11, 111, \overset{b}{1111}, 11111, 111111\}$$

mod 6 $\quad 1 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad 3$

$11111 - 11 = 11100$

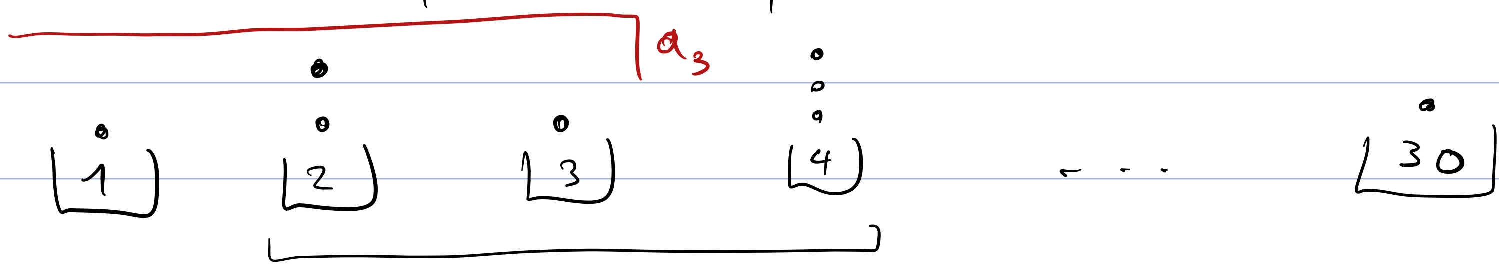
$1111 - 1 = 1110$

$\square$

Άσκηση

- 30 κουτιά αριθμημένα 1...30
- 45 μπάλες
- Τουλάχιστον 1 μπάλα σε κάθε κουτί.

Ν.δ.ο. υπάρχουν διαδοχικά κουτιά με ακριβώς 14 μπάλες.

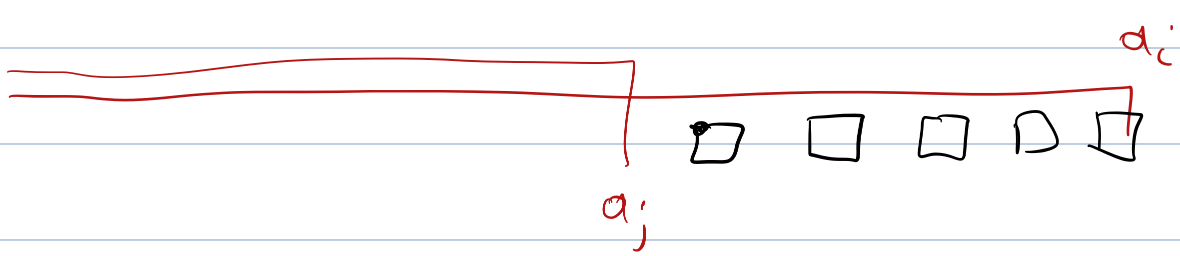


a_i = "Το πλήθος από μπάλες στα πρώτα i κουτιά"

$$1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_{30} = 45$$

Αν υπάρχει j τ.ω. $a_i = a_j + 14$

Τελειώνω γιατί τα κουτιά $j+1 \dots i$ έχουν 14 μπάλες



$$b_j = a_j + 14$$

$1 \leq a_1, a_2, \dots, a_{30}, b_1, b_2, \dots, b_{30} \leq \underset{59}{\underset{\|}{45+14}}$

Άρα υπάρχει i και j

$a_i = b_j$ γιατί 2 όροι της a δεν μπορεί να είναι ίση ούτε της b

$\Downarrow$

$a_i = a_j + 14$

Θεώρημα: Κάθε ακολουθία από n^2+1 διαφορετικούς αριθμούς περιέχει είτε μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία μήκους $n+1$ είτε μια γνησίως φθίνουσα

Π.χ. $n=2$ $7, 3, 6, 5, 8$

$3, 5, 8$ αύξουσα ή $3, 6, 8$

$7, 6, 5$ φθίνουσα

1 , 2 , 3 , 5 , 4

1, 2, 3, 5 αύξουσα

Ορίζω

a_i = μεγαλύτερη αύξουσα υπακολουθία που ξεκινάει από τη θέση i

φ_i = μεγαλύτερη φθίνουσα υπακολουθία που ξεκινάει από τη θέση i

	7	3	6	5	8
a_i	2	3	2	2	1
φ_i	3	1	2	1	1

Αν κάποιο a_i ή $\varphi_i \geq n+1$ τελειώνω,

Υποθέτω ότι $\forall i$ $a_i, \varphi_i \leq n$ για να καταλήξω σε άτοπο

Πόσα ζεύγη (a_i, φ_i) υπάρχουν;

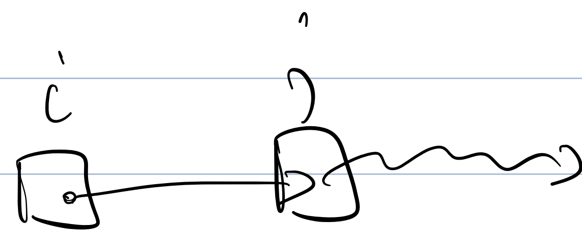
$\{1, \dots, n\}$

n^2 επιλογές $\underbrace{\quad}_{n \text{ πρώτο}}$ $\underbrace{\quad}_{n \text{ για το δεύτερο}}$

αλλά η ακολουθία έχει μήκος n^2+1

Άρα υπάρχει $i < j$ με

$$a_i = a_j$$
$$\varphi_i = \varphi_j$$



Αν $x_i < x_j$ πρέπει $a_i \geq a_j + 1$

Αν $x_i > x_j$ πρέπει $\varphi_i \geq \varphi_j + 1$

Σε κάθε περίπτωση $(a_i, \varphi_i) \neq (a_j, \varphi_j)$

Άτοπο $\square$

$i =$	1	2	3	4	5
$x_i =$	7	3	6	5	8
a_i	2				
φ_i	3				