Μετασχηματισμός ενός πραγματικού πίνακα 2×2 σε μία από τις μορφές:

α) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ β) $\begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

γ) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα α) ο πίνακας έχει δύο πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και δύο αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση για το επίπεδο. Εάν x_1, x_2 είναι τα ιδιοδιανύσματα τότε

$$A x_1 = \lambda_1 x_1$$
$$A x_2 = \lambda_2 x_2$$

και συνεπώς αν $X = [x_1, x_2]$ ο 2×2 πίνακας με κολώνες τα ιδιοδιανύσματα τότε

$$AX = A[x_1, x_2] = [Ax_1, Ax_2] =$$

$$= [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2] = [x_1, x_2] \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

$$= X \Lambda$$

άρα $X^{-1} A X = \Lambda$

δηλαδή αν $\dfrac{dx}{dt} = Ax$

και κάνω τον μετασχηματισμό

$y = X^{-1} x$ τότε το y

διέπεται από το δυναμικό σύστημα

$$\frac{dy}{dt} = (X^{-1} A X) y$$

ή $$\frac{dy}{dt} = \Lambda y$$

η δυναμική είναι "τοπολογικά" ισοδύναμη (αλλά όχι ~~όπως~~ και μετρικά ισοδύναμη) με αυτή το πίνακα $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

<u>Περίπτωση</u> β) έχω δύο μιγαδικές ιδιοτιμές. Τότε επειδή ο A είναι πραγματικός θα είναι η μία συζυγής της άλλης και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα συζυγή. Έστω ότι οι ιδιοτιμές είναι $\sigma \pm i\omega$ και τα ιδιοδιανύσματα

$$x_1 = u + iv$$
$$x_2 = u - iv$$

όπου u & v πραγματικά διανύσματα.

<u>Παρατήρηση</u> Τα u & v είναι αναγκαστικά γραμμικά ανεξάρτητα (και συνεπώς και τα x_1, x_2)

<u>Απόδειξη</u> Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι. Και $u = \lambda v$

επειδή u, v πραγματικά τότε

και το $\lambda \in \mathbb{R}$.

Τότε έχουμε

$$A x_1 = A(u + iv) = (\sigma + i\omega)(u + iv)$$
$$= (\sigma + i\omega)(\lambda v + iv)$$
$$= (\sigma + i\omega)(\lambda + i) v$$

και αφετέρου

$$A x_1 = A(\lambda v + iv) = (\lambda + i) A v$$

συνεπώς $\quad A v = (\sigma + i\omega) v$

Αλλά αυτό είναι αδύνατο

διότι Av είναι πραγματικό

διάνυσμα, καθώς και το v

όπου άτοπο.

Άρα τα u & v είναι

γραμμικά ανεξάρτητα.

Τώρα $Ax_1 = A(u+iv) = Au + iAv =$

$$= (\sigma + i\omega)(u+iv)$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και μιγαδικά μέρη αυτής της σχέσης έχω:

$$Au = \sigma u - \omega v$$

$$Av = \omega u + \sigma v$$

σχηματίζω πίνακα

$$X = [u, v]$$

Τότε $AX = [Au, Av] =$

$$= [\sigma u - \omega v, \omega u + \sigma v] =$$

$$= [u, v] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \equiv X \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Πράγματι

$$[u, v] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & v_{11} \\ u_{12} & v_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11}\sigma - \omega v_{11} & \omega u_{11} + \sigma v_{11} \\ u_{12}\sigma - \omega v_{12} & \omega u_{12} + \sigma v_{12} \end{bmatrix} = [\sigma u - \omega v, \omega u + \sigma v]$$

Άρα $$AX = X\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

και $$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Συνεπώς αν έχω μιγαδικά ιδιοτιμές με ιδιοδιανύσματα

$u \pm iv$

ο μετασχηματισμός

$$y = X^{-1}x$$

με $X = [u, v]$

μετασχηματίζει το
δυναμικό σε αυτόν

τη $$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

και περιγράφει σπείρα, ασταθή αν $\sigma > 0$
και ευσταθεί αν $\sigma < 0$ και κέντρο αν $\sigma = 0$.

Περίπτωση γ) (Jordan block).

Έστω ότι ο πίνακας A έχει μία ιδιοτιμή λ_0 αλλά μία μόνο ιδιοκατεύθυνση την x_0.

Παίρνω για κάποιο x_1 γραμμικά ανεξάρτητο από το x_0 (συνήθως δεν το θέλω καλύτερα τα χαρτιά)

θέλω να βρω τι κάνει το Ax_1, σίγουρα επειδή δεν μπορεί να είναι ιδιοκατεύθυνση θα είναι $Ax_1 \neq \mu x_1$

υποστηρίζω τώρα ότι είναι αναγκαστικά

$$Ax_1 = \kappa x_0 + \lambda_0 x_1 \; !$$

Έστω ότι είναι

$$Ax_1 = \kappa x_0 + \mu x_1$$

($\kappa \neq 0$, όπως είδαμε)

Θα δείξω ότι αναγκαστικά

$\mu = \lambda_0$.

Η περίπτωση (γ) αναφέρεται

στη περίπτωση που το

ίχνος του A, T,

ικανοποιεί της σχέση $T^2 = 4D$

$(D = \det(A))$ έτσι ώστε το

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

να έχει τη μορφή

$$\lambda^2 - T\lambda + T^2/4 = 0$$

δηλαδή να είναι τέλειο τετράγωνο:

$$\left(\lambda - \frac{T}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{ή} \quad (\lambda - \lambda_0)^2 = 0$$

Αλλά από το Cayley-Hamilton

ο πίνακας A ικανοποιεί το

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

δηλαδή αναγκαστικά

$$(A-\lambda_0 I)^2=0$$

δηλαδή $A^2 = 2\lambda_0 A - \lambda_0^2 I$

υπολογίζω τώρα το

$A^2 x_1$ με δύο τρόπους.

πρώτα $A(Ax_1) = A(\kappa x_0 + \mu x_1)$

$$= \lambda_0 \kappa x_0 + \mu(\kappa x_0 + \mu x_1)$$

$$= \kappa(\lambda_0+\mu)x_0 + \mu^2 x_1$$

έπειτα μέσω του Cayley-Hamilton

$$A^2 x_1 = 2\lambda_0 A x_1 - \lambda_0^2 x_1$$

$$= 2\lambda_0(\kappa x_0 + \mu x_1) - \lambda_0^2 x_1$$

$$= 2\lambda_0 \kappa x_0 + x_1 \lambda_0(2\mu - \lambda_0)$$

συνεπώς επειδή τα x_0 & x_1

είναι γραμμικά ανεξάρτητα

θα πρέπει να έχω

$\kappa(\lambda_0+\mu) = 2\lambda_0 \kappa$ (1) $(\kappa \neq 0)$

και $\mu^2 = \lambda_0(2\mu-\lambda)$ (2)

από την (1) αμέσως προκύπτει

ότι $\lambda_0=\mu$ και η (2)

ικανοποιείται.

Άρα $\forall\, x_1$ που είναι

γραμμικά ανεξάρτητο του x_0

έχω $A x_1 = \kappa x_0 + \lambda_0 x_1$

για κάποιο $\kappa \neq 0$ που εξαρτάται

από το x_1.

Επιλέγω ένα τέτοιο x_1

υπολογίζω το κ που του

αντιστοιχεί και λαμβάνω

το $\xi = \frac{x_1}{\kappa}$

Τότε $A\xi = x_0 + \lambda_0 x_1$

λαμβάνω

$$X = [x_0, \xi]$$

Τότε

$$AX = [Ax_0, A\xi]$$

$$= [\lambda_0 x_0, x_0 + \lambda_0 \xi]$$

$$= X \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

Πράγματι

$$\begin{bmatrix} x_{01} & \xi_1 \\ x_{02} & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 x_{01} & x_{01} + \lambda_0 \xi_1 \\ \lambda_0 x_{02} & x_{02} + \lambda_0 \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$= [\lambda_0 x_0, x_0 + \lambda_0 \xi]$$

Επειδή ο X είναι αντιστρέψιμος (τα x_0 & x_1 γραμμικά ανεξάρτητα)

θα είναι $X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$

οπότε στην περίπτωση αυτή

ο μετασχηματισμός

$$y = X^{-1} x$$

όπου $X = [x_0, \xi]$

μετατρέπει το αρχικό σύστημα σε μορφή Jordan

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} y$$

Σημ. ότι είναι $Ax_1 = \kappa x_0 + \lambda_0 x_1$

$\forall$ x_1 γραμμικά ανεξάρτητο του ισχύει

x_0, μπορεί να δειχθεί

Χωρίς Cayley-Hamilton.

χρήση

π.χ. αν υποθέσουμε ότι $Ax_1 = \kappa x_0 + \mu x_1$

όπου $\kappa \neq 0$ & $\mu \neq \lambda_0$

Τότε αν υπολογίσουμε

το $A\left(x_1 + \frac{k}{\mu-\lambda_0}x_0\right) =$

$$= kx_0 + \mu x_1 + \frac{k\lambda_0}{\mu-\lambda_0}x_0$$

$$= k\left[\frac{\mu - \cancel{\lambda_0} + \cancel{\lambda_0}}{\mu-\lambda_0}\right]x_0 + \mu x_1$$

$$= \mu\left[x_1 + \frac{k}{\mu-\lambda_0}x_0\right]$$

δηλαδή αν $\mu \neq \lambda_0$

το $x_1 + \frac{k}{\mu-\lambda_0}x_0$ θα

είναι άλλο ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή μ!

Αλλά αυτό είναι αδύνατο
διότι έχουμε υποθέσει ότι
υπάρχει ένα μόνο ιδιοδιάνυσμα.

Τέλος