

Μετασχηματισμοί ενός πραγματικού
πίνακα 2×2 σε ένα από τις μορφές:

$$\alpha) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \beta) \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}, \begin{matrix} \sigma, \omega \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\gamma) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Πρόταση α) Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

δύο πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
και δύο αλληλοπυκνωμένα ιδιοδιανύσματα

που είναι γραμμικά ανεξάρτητα και
αλληλοπυκνωμένα βάσει του ε.μ.π.δ.

(είναι λ_1, λ_2 είναι οι ιδιοδιανύσματα

$$\text{τότε } Ax_1 = \lambda_1 x_1$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2$$

και συνεπώς αν $X = [x_1, x_2]$

ο 2×2 πίνακας με κορυφές οι
ιδιοδιανύσματα τότε

$$\begin{aligned}
 AX &= A[x_1, x_2] = [Ax_1, Ax_2] = \\
 &= [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2] = [x_1, x_2] \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \\
 &= X\Lambda
 \end{aligned}$$

αρα $X^{-1}AX = \Lambda$

δηλαδή αν $\frac{dx}{dt} = Ax$

και κάνω τον μετασχηματισμό
 $y = X^{-1}x$ τότε το y

δίνεται και το δυναμικό σύστημα

$$\frac{dy}{dt} = (X^{-1}AX)y$$

$$\text{ή} \quad \frac{dy}{dt} = \Lambda y$$

ή δυναμικά είναι "τοπολογικά" ισοδύναμα
 (αλλά όχι οφώς ^{και} ~~μετρικά~~ ^{μετρικά})

Ητ αυτών τι είναι $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Πηλητών p) έχω δύο μιγαδικές

ιδιότητες. τότε είναι ο

A είναι πραγματική διάνυσμα

ή μηδενική ή άλλη και

τα ανήκοντα ιδιοδιανύσματα

συμψη. Εστω ότι

οι ιδιοτιμές είναι $\sigma \pm i\omega$

και τα ιδιοδιανύσματα

$$x_1 = u + i v$$

$$x_2 = u - i v$$

οι u & v πραγματικές
διανύσματα.

Παρατήρηση Τα u & v είναι

αυτοκαθάρσις ορθογώνια και ανεξάρτητα

(και συνεπώς και τα x_1, x_2)

Αντίθεση Ας υποθέσουμε ότι
 δεν είναι και $u \neq \lambda v$
 είναι u, v πραγματικά $T \neq 0$
 και τότε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Τότε αλγεβρικοί

$$Ax_1 = A(u + iv) = (\sigma + i\omega)(u + iv)$$

$$= (\sigma + i\omega)(\lambda v + iv)$$

$$= (\sigma + i\omega)(\lambda + i)v$$

και αλγεβρικός

$$Ax_2 = A(\lambda v + iv) = (\lambda + i)Av$$

$$\text{συνεπώς} \quad Av = (\sigma + i\omega)v$$

Ax_1 & Ax_2 είναι αδύνατα

διότι Av είναι πραγματικό
 διάνυσμα, καθί και τότε v

δηλ ατίμη.

Άρα τα u & v είναι

πραγματικά ανεξάρτητα.

Τίμα $Ax_1 = A(u+iv) = Au + iAv =$
 $= (\sigma + i\omega)(u+iv)$

Εξισώνοντας τις πραγματικές και
 φανταστικές μέρη από τις σχέσεις έχουμε:

$$Au = \sigma u - \omega v$$

$$Av = \omega u + \sigma v$$

σχετίζουμε πάλι με

$$X = [u, v]$$

τότε $AX = [Au, Av] =$

$$= [\sigma u - \omega v, \omega u + \sigma v] =$$

$$= [u, v] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \equiv X \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Παραχρησιμοποιώντας

$$[u, v] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & v_{11} \\ u_{12} & v_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11}\sigma - \omega v_{11} & \omega u_{11} + \sigma v_{11} \\ u_{12}\sigma - \omega v_{12} & \omega u_{12} + \sigma v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma u - \omega v & \omega u + \sigma v \end{bmatrix}$$

Αρα $AX = X \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$

και $X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$

Συνεπώς αν έχω πραγματικά
ιδιοτιμές με ιδιοκτιμήσεις
αυτών

ο μετασχηματισμός
 $y = X^{-1}x$

με $X = [u, v]$

μετασχηματίζει τις
δυναμικές αυτές

τη $\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$

πρηνή στην σφίξη, αν δηλ. αν $\sigma > 0$

και συνδέει u, v και v, u αν $\sigma = 0$.

Μηινωα τ) (Jordan block).

Εστω οη ο λινάκη

A εχη για ιδιότηκι λo

α) α) για ήιο ιδιοκαρίαση

τιν λo

Παηβίον ^{ιδιόηοιο} χ1 γραφικέ

αυηάρτε ο αν τλ λo (υηάτη δίνε

Θέηο νι βρι τι κάνη α' ^{τι λo} ^{δίν} ^{καχέση} ^{αίχέηο}

τ' A χ1, σίδηρα εντλ

δλ ήαηί νι ήναι ιδιοκαρίαση δλ

ειναι A χ1 ≠ ή χ1

υηοστηρίηο ^{τιν} οτι ειναι αυασηκονικέ

$$A χ1 = κ χo + δo χ1 :$$

Εστω οηι ειναι

$$A χ1 = κ χo + ή χ1$$

(κ ≠ 0, ηη ή ιδιότη)

Θα δείξω ότι ανυπακοσικά

$$\mu = \lambda_0$$

Η πίνακα (σ) διαφέρει

στην πίνακα παρ. 7.

Ιχνη $\tau = A, T$

ικανοποιεί τις σχέσεις $T^2 = 4D$

($D = \det(A)$) έτσι να τ

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

να έχει τις ρίζες

$$\lambda^2 - T\lambda + \frac{T^2}{4} = 0$$

δηλαδή να είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{T}{2}$

$$\left(\lambda - \frac{T}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{ή} \quad (\lambda - \lambda_0)^2 = 0$$

Αντιόμοια Cayley-Hamilton

ε πίνακα A ικανοποιεί τις

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

δηλαδή να κατασκευάσει

$$(A - \lambda_0 I)^2 = 0$$

δηλαδή $A^2 = 2\lambda_0 A - \lambda_0^2 I$

υπολογίζω τώρα T :

$A^2 x_1$ με δύο τρόπους.

πρώτα $A(Ax_1) = A(kx_0 + \mu x_1)$

$$= \lambda_0 k x_0 + \mu (k x_0 + \mu x_1)$$

$$= k(\lambda_0 + \mu) x_0 + \mu^2 x_1$$

Επειτά βρίσκω το Cayley-Hamilton

$$A^2 x_1 = 2\lambda_0 A x_1 - \lambda_0^2 x_1$$

$$= 2\lambda_0 (k x_0 + \mu x_1) - \lambda_0^2 x_1$$

$$= 2\lambda_0 k x_0 + x_1 \lambda_0 (2\mu - \lambda_0)$$

συνεπώς επιλέγω για x_0 & x_1

είναι ορατά και από τα παραπάνω

θα μείνει να βρω

$$K(\lambda_0 + k) = 2\lambda_0 K \quad (1) \quad (k \neq 0)$$

$$\text{και } \mu^2 = \lambda_0(2k-1) \quad (2)$$

από την (1) αφέσαι η.κ.α.η
που $\lambda_0 = k$ και η (2)
επεί ούτως.

Αν $\forall x_1$ να είναι

γινώσκουμε εύκολα ότι x_0

$$\text{έχουμε } Ax_1 = kx_0 + \lambda_0 x_1$$

για κάθε $k \neq 0$ να εξετασθεί

από το x_0 . τίπολο

Επιλέγουμε $\xi \in X_1$

υπολογίζουμε το k που του
αυτιστοιχία και λαμβάνουμε

$$\tau: \xi = \frac{x_1}{k}$$

$$\text{τότε } A\xi = x_0 + \lambda_0 x_1$$

λ α β α υ υ

$$X = [x_0, \xi]$$

$$\tau: \mathbb{R} \quad AX = [Ax_0, A\xi]$$

$$= [\lambda_0 x_0, x_0 + \lambda_0 \xi]$$

$$= X \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

η α β α υ υ

$$\begin{bmatrix} x_{01} & \xi_1 \\ x_{02} & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 x_{01} & x_{01} + \lambda_0 \xi_1 \\ \lambda_0 x_{02} & x_{02} + \lambda_0 \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$= [\lambda_0 x_0, x_0 + \lambda_0 \xi]$$

Επιπλέον ο X είναι αναστρέψιμο

(για $x_0 \neq x_1$ γραμμικώς ανεξάρτητες)

$$\text{θα είναι} \quad X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

ο νόμος είναι γραμμικός αυτός

ο μετασχηματισμός

$$y = X^{-1} x$$

$$\text{π.χ. } X = \begin{bmatrix} x_0 & \xi \end{bmatrix}$$

μετατρέπεται σε γραμμικό
ορίζεται οι κοπές Jordans

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} y$$

Συμπερασματικά οπότε $Ax_1 = kx_0 + \lambda_0 x_1$
η x_1 συγκεκριμένα κοπές λ_0 x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} x_{15} x_{16} x_{17} x_{18} x_{19} x_{20} x_{21} x_{22} x_{23} x_{24} x_{25} x_{26} x_{27} x_{28} x_{29} x_{30} x_{31} x_{32} x_{33} x_{34} x_{35} x_{36} x_{37} x_{38} x_{39} x_{40} x_{41} x_{42} x_{43} x_{44} x_{45} x_{46} x_{47} x_{48} x_{49} x_{50} x_{51} x_{52} x_{53} x_{54} x_{55} x_{56} x_{57} x_{58} x_{59} x_{60} x_{61} x_{62} x_{63} x_{64} x_{65} x_{66} x_{67} x_{68} x_{69} x_{70} x_{71} x_{72} x_{73} x_{74} x_{75} x_{76} x_{77} x_{78} x_{79} x_{80} x_{81} x_{82} x_{83} x_{84} x_{85} x_{86} x_{87} x_{88} x_{89} x_{90} x_{91} x_{92} x_{93} x_{94} x_{95} x_{96} x_{97} x_{98} x_{99} x_{100} x_{101} x_{102} x_{103} x_{104} x_{105} x_{106} x_{107} x_{108} x_{109} x_{110} x_{111} x_{112} x_{113} x_{114} x_{115} x_{116} x_{117} x_{118} x_{119} x_{120} x_{121} x_{122} x_{123} x_{124} x_{125} x_{126} x_{127} x_{128} x_{129} x_{130} x_{131} x_{132} x_{133} x_{134} x_{135} x_{136} x_{137} x_{138} x_{139} x_{140} x_{141} x_{142} x_{143} x_{144} x_{145} x_{146} x_{147} x_{148} x_{149} x_{150} x_{151} x_{152} x_{153} x_{154} x_{155} x_{156} x_{157} x_{158} x_{159} x_{160} x_{161} x_{162} x_{163} x_{164} x_{165} x_{166} x_{167} x_{168} x_{169} x_{170} x_{171} x_{172} x_{173} x_{174} x_{175} x_{176} x_{177} x_{178} x_{179} x_{180} x_{181} x_{182} x_{183} x_{184} x_{185} x_{186} x_{187} x_{188} x_{189} x_{190} x_{191} x_{192} x_{193} x_{194} x_{195} x_{196} x_{197} x_{198} x_{199} x_{200} x_{201} x_{202} x_{203} x_{204} x_{205} x_{206} x_{207} x_{208} x_{209} x_{210} x_{211} x_{212} x_{213} x_{214} x_{215} x_{216} x_{217} x_{218} x_{219} x_{220} x_{221} x_{222} x_{223} x_{224} x_{225} x_{226} x_{227} x_{228} x_{229} x_{230} x_{231} x_{232} x_{233} x_{234} x_{235} x_{236} x_{237} x_{238} x_{239} x_{240} x_{241} x_{242} x_{243} x_{244} x_{245} x_{246} x_{247} x_{248} x_{249} x_{250} x_{251} x_{252} x_{253} x_{254} x_{255} x_{256} x_{257} x_{258} x_{259} x_{260} x_{261} x_{262} x_{263} x_{264} x_{265} x_{266} x_{267} x_{268} x_{269} x_{270} x_{271} x_{272} x_{273} x_{274} x_{275} x_{276} x_{277} x_{278} x_{279} x_{280} x_{281} x_{282} x_{283} x_{284} x_{285} x_{286} x_{287} x_{288} x_{289} x_{290} x_{291} x_{292} x_{293} x_{294} x_{295} x_{296} x_{297} x_{298} x_{299} x_{300} x_{301} x_{302} x_{303} x_{304} x_{305} x_{306} x_{307} x_{308} x_{309} x_{310} x_{311} x_{312} x_{313} x_{314} x_{315} x_{316} x_{317} x_{318} x_{319} x_{320} x_{321} x_{322} x_{323} x_{324} x_{325} x_{326} x_{327} x_{328} x_{329} x_{330} x_{331} x_{332} x_{333} x_{334} x_{335} x_{336} x_{337} x_{338} x_{339} x_{340} x_{341} x_{342} x_{343} x_{344} x_{345} x_{346} x_{347} x_{348} x_{349} x_{350} x_{351} x_{352} x_{353} x_{354} x_{355} x_{356} x_{357} x_{358} x_{359} x_{360} x_{361} x_{362} x_{363} x_{364} x_{365} x_{366} x_{367} x_{368} x_{369} x_{370} x_{371} x_{372} x_{373} x_{374} x_{375} x_{376} x_{377} x_{378} x_{379} x_{380} x_{381} x_{382} x_{383} x_{384} x_{385} x_{386} x_{387} x_{388} x_{389} x_{390} x_{391} x_{392} x_{393} x_{394} x_{395} x_{396} x_{397} x_{398} x_{399} x_{400} x_{401} x_{402} x_{403} x_{404} x_{405} x_{406} x_{407} x_{408} x_{409} x_{410} x_{411} x_{412} x_{413} x_{414} x_{415} x_{416} x_{417} x_{418} x_{419} x_{420} x_{421} x_{422} x_{423} x_{424} x_{425} x_{426} x_{427} x_{428} x_{429} x_{430} x_{431} x_{432} x_{433} x_{434} x_{435} x_{436} x_{437} x_{438} x_{439} x_{440} x_{441} x_{442} x_{443} x_{444} x_{445} x_{446} x_{447} x_{448} x_{449} x_{450} x_{451} x_{452} x_{453} x_{454} x_{455} x_{456} x_{457} x_{458} x_{459} x_{460} x_{461} x_{462} x_{463} x_{464} x_{465} x_{466} x_{467} x_{468} x_{469} x_{470} x_{471} x_{472} x_{473} x_{474} x_{475} x_{476} x_{477} x_{478} x_{479} x_{480} x_{481} x_{482} x_{483} x_{484} x_{485} x_{486} x_{487} x_{488} x_{489} x_{490} x_{491} x_{492} x_{493} x_{494} x_{495} x_{496} x_{497} x_{498} x_{499} x_{500} x_{501} x_{502} x_{503} x_{504} x_{505} x_{506} x_{507} x_{508} x_{509} x_{510} x_{511} x_{512} x_{513} x_{514} x_{515} x_{516} x_{517} x_{518} x_{519} x_{520} x_{521} x_{522} x_{523} x_{524} x_{525} x_{526} x_{527} x_{528} x_{529} x_{530} x_{531} x_{532} x_{533} x_{534} x_{535} x_{536} x_{537} x_{538} x_{539} x_{540} x_{541} x_{542} x_{543} x_{544} x_{545} x_{546} x_{547} x_{548} x_{549} x_{550} x_{551} x_{552} x_{553} x_{554} x_{555} x_{556} x_{557} x_{558} x_{559} x_{560} x_{561} x_{562} x_{563} x_{564} x_{565} x_{566} x_{567} x_{568} x_{569} x_{570} x_{571} x_{572} x_{573} x_{574} x_{575} x_{576} x_{577} x_{578} x_{579} x_{580} x_{581} x_{582} x_{583} x_{584} x_{585} x_{586} x_{587} x_{588} x_{589} x_{590} x_{591} x_{592} x_{593} x_{594} x_{595} x_{596} x_{597} x_{598} x_{599} x_{600} x_{601} x_{602} x_{603} x_{604} x_{605} x_{606} x_{607} x_{608} x_{609} x_{610} x_{611} x_{612} x_{613} x_{614} x_{615} x_{616} x_{617} x_{618} x_{619} x_{620} x_{621} x_{622} x_{623} x_{624} x_{625} x_{626} x_{627} x_{628} x_{629} x_{630} x_{631} x_{632} x_{633} x_{634} x_{635} x_{636} x_{637} x_{638} x_{639} x_{640} x_{641} x_{642} x_{643} x_{644} x_{645} x_{646} x_{647} x_{648} x_{649} x_{650} x_{651} x_{652} x_{653} x_{654} x_{655} x_{656} x_{657} x_{658} x_{659} x_{660} x_{661} x_{662} x_{663} x_{664} x_{665} x_{666} x_{667} x_{668} x_{669} x_{670} x_{671} x_{672} x_{673} x_{674} x_{675} x_{676} x_{677} x_{678} x_{679} x_{680} x_{681} x_{682} x_{683} x_{684} x_{685} x_{686} x_{687} x_{688} x_{689} x_{690} x_{691} x_{692} x_{693} x_{694} x_{695} x_{696} x_{697} x_{698} x_{699} x_{700} x_{701} x_{702} x_{703} x_{704} x_{705} x_{706} x_{707} x_{708} x_{709} x_{710} x_{711} x_{712} x_{713} x_{714} x_{715} x_{716} x_{717} x_{718} x_{719} x_{720} x_{721} x_{722} x_{723} x_{724} x_{725} x_{726} x_{727} x_{728} x_{729} x_{730} x_{731} x_{732} x_{733} x_{734} x_{735} x_{736} x_{737} x_{738} x_{739} x_{740} x_{741} x_{742} x_{743} x_{744} x_{745} x_{746} x_{747} x_{748} x_{749} x_{750} x_{751} x_{752} x_{753} x_{754} x_{755} x_{756} x_{757} x_{758} x_{759} x_{760} x_{761} x_{762} x_{763} x_{764} x_{765} x_{766} x_{767} x_{768} x_{769} x_{770} x_{771} x_{772} x_{773} x_{774} x_{775} x_{776} x_{777} x_{778} x_{779} x_{780} x_{781} x_{782} x_{783} x_{784} x_{785} x_{786} x_{787} x_{788} x_{789} x_{790} x_{791} x_{792} x_{793} x_{794} x_{795} x_{796} x_{797} x_{798} x_{799} x_{800} x_{801} x_{802} x_{803} x_{804} x_{805} x_{806} x_{807} x_{808} x_{809} x_{810} x_{811} x_{812} x_{813} x_{814} x_{815} x_{816} x_{817} x_{818} x_{819} x_{820} x_{821} x_{822} x_{823} x_{824} x_{825} x_{826} x_{827} x_{828} x_{829} x_{830} x_{831} x_{832} x_{833} x_{834} x_{835} x_{836} x_{837} x_{838} x_{839} x_{840} x_{841} x_{842} x_{843} x_{844} x_{845} x_{846} x_{847} x_{848} x_{849} x_{850} x_{851} x_{852} x_{853} x_{854} x_{855} x_{856} x_{857} x_{858} x_{859} x_{860} x_{861} x_{862} x_{863} x_{864} x_{865} x_{866} x_{867} x_{868} x_{869} x_{870} x_{871} x_{872} x_{873} x_{874} x_{875} x_{876} x_{877} x_{878} x_{879} x_{880} x_{881} x_{882} x_{883} x_{884} x_{885} x_{886} x_{887} x_{888} x_{889} x_{890} x_{891} x_{892} x_{893} x_{894} x_{895} x_{896} x_{897} x_{898} x_{899} x_{900} x_{901} x_{902} x_{903} x_{904} x_{905} x_{906} x_{907} x_{908} x_{909} x_{910} x_{911} x_{912} x_{913} x_{914} x_{915} x_{916} x_{917} x_{918} x_{919} x_{920} x_{921} x_{922} x_{923} x_{924} x_{925} x_{926} x_{927} x_{928} x_{929} x_{930} x_{931} x_{932} x_{933} x_{934} x_{935} x_{936} x_{937} x_{938} x_{939} x_{940} x_{941} x_{942} x_{943} x_{944} x_{945} x_{946} x_{947} x_{948} x_{949} x_{950} x_{951} x_{952} x_{953} x_{954} x_{955} x_{956} x_{957} x_{958} x_{959} x_{960} x_{961} x_{962} x_{963} x_{964} x_{965} x_{966} x_{967} x_{968} x_{969} x_{970} x_{971} x_{972} x_{973} x_{974} x_{975} x_{976} x_{977} x_{978} x_{979} x_{980} x_{981} x_{982} x_{983} x_{984} x_{985} x_{986} x_{987} x_{988} x_{989} x_{990} x_{991} x_{992} x_{993} x_{994} x_{995} x_{996} x_{997} x_{998} x_{999} x_{1000}

π.χ. αν υποθέσουμε $Ax_1 = kx_0 + \lambda_0 x_1$
π.χ. $k \neq 0$ & $k \neq \lambda_0$

7576
αβ υηολ.νίσωφκ

$$\tau: A \left(x_1 + \frac{K}{\mu - \lambda_0} x_0 \right) =$$

$$= K x_0 + \mu x_1 + \frac{K \lambda_0}{\mu - \lambda_0} x_0$$

$$= K \left[\frac{\mu - \lambda_0 + \lambda_0}{\mu - \lambda_0} \right] x_0 + \mu x_1$$

$$= \mu \left[x_1 + \frac{K}{\mu - \lambda_0} x_0 \right]$$

δηλαδή αν $\mu \neq \lambda_0$

$$\tau: x_1 + \frac{K}{\mu - \lambda_0} x_0 \quad \partial \tau$$

Επειδή λ_0 ιδιοδιάνυστα
φεί ιδιοτιμή μ !

Α γλῶσσι ἀμὶ φίλῃ ἀδύνατον
δίων ἔχουσι καὶ ἀδύνατον
καὶ ἀδύνατον ἐν τῷ ἴσῳ, ἀδύνατον

Τέλος