Μηχανική ΙΙ

Φυσική Ο

Πέμπτη 29-2-24

1η διάλεξη

Διαδικαστικά

ΙΙ: 1-3

ΠΕ: 2-5 (1η 2 ώρες → ασκήσεις)

Βιβλιογρ.

Mechanics (Landau-Lifshitz)

Χατζηιωάννου

Feynman I (ch.26) II (ch.19)

QED

Math. Methods of Class. Mech. (Arnol'd)

Ο κόσμος μας είναι ο καλύτερος δυνατός.

Ένα φυσ. σύστημα περιγράφεται από κάποια συνάρτηση, την Λαγκρανζιανή L(συστήματος)
κ έχει την ιδιότητα να "κινείται" με τέτοιο τρόπο ώστε η δράση S

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt$$

να καθίσταται στάσιμη, με δεδομένη την κατάστ. του συστ. τις t_1, t_2.

Αρχή Hamilton ή αρχή στάσιμης δράσης

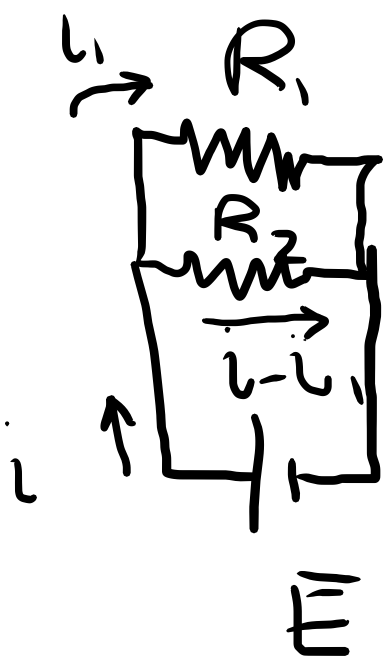
ή αρχή ελάχιστης δράσης (χρησ. ιστορικά)

ο τρόπος που εξελίσσεται χρονικά

ένα σύστημα είναι συμβατό

(ή απορρέει) από την αρχή του Ham.

Παράδειγμα I (κυκλώματα)



Το σύστημα κατανέμει τα ρεύματα έτσι ώστε η κατανάλωση ενέργ. να είναι ελάχιστη

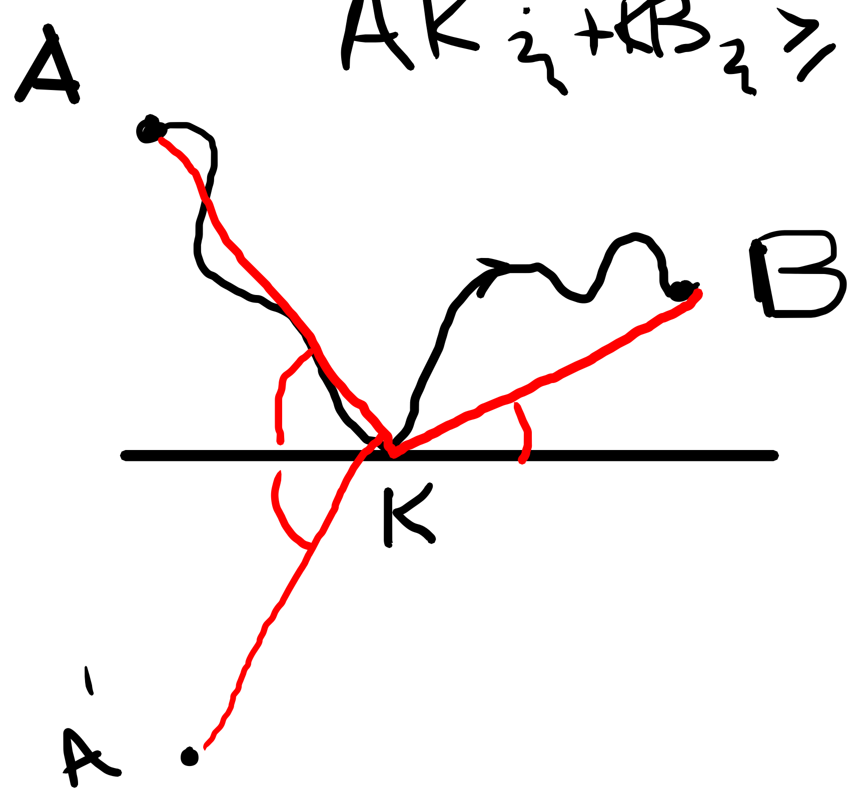
$$W=\frac{dE}{dt} = i_1^2 R_1 + i_2^2 R_2 = i_1^2 R_1 + (i-i_1)^2 R_2$$

$$\frac{dW}{di_1} = 0 \Rightarrow 2 i_1 R_1 - 2(i-i_1) R_2 = 0$$

$$\Rightarrow i_1 R_1 = (i-i_1) R_2 = i_2 R_2$$

παράδειγμα 2:

ανάκλαση φωτός ⇐ απαίτηση: κίνηση της φωτ. δέσμης να έχει τη μικρότερη δυνατή διαδρομή



$AK_i + KB_i \geq AK + KB \geq A'B$ (min)

$AK_i \geq AK_{ευθ}$

$KB_{\sim} \geq KB_{ευθ}$

$AK + KB = A'K + KB$

$\underset{min}{\Longrightarrow}$ A', K, B συνευθ. ευθειακά σημ.

$\Rightarrow φ_{προσ} = φ_{ανακλ}$.

Αρχή Hamilton: λεπτομέρειες.

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, t)$$

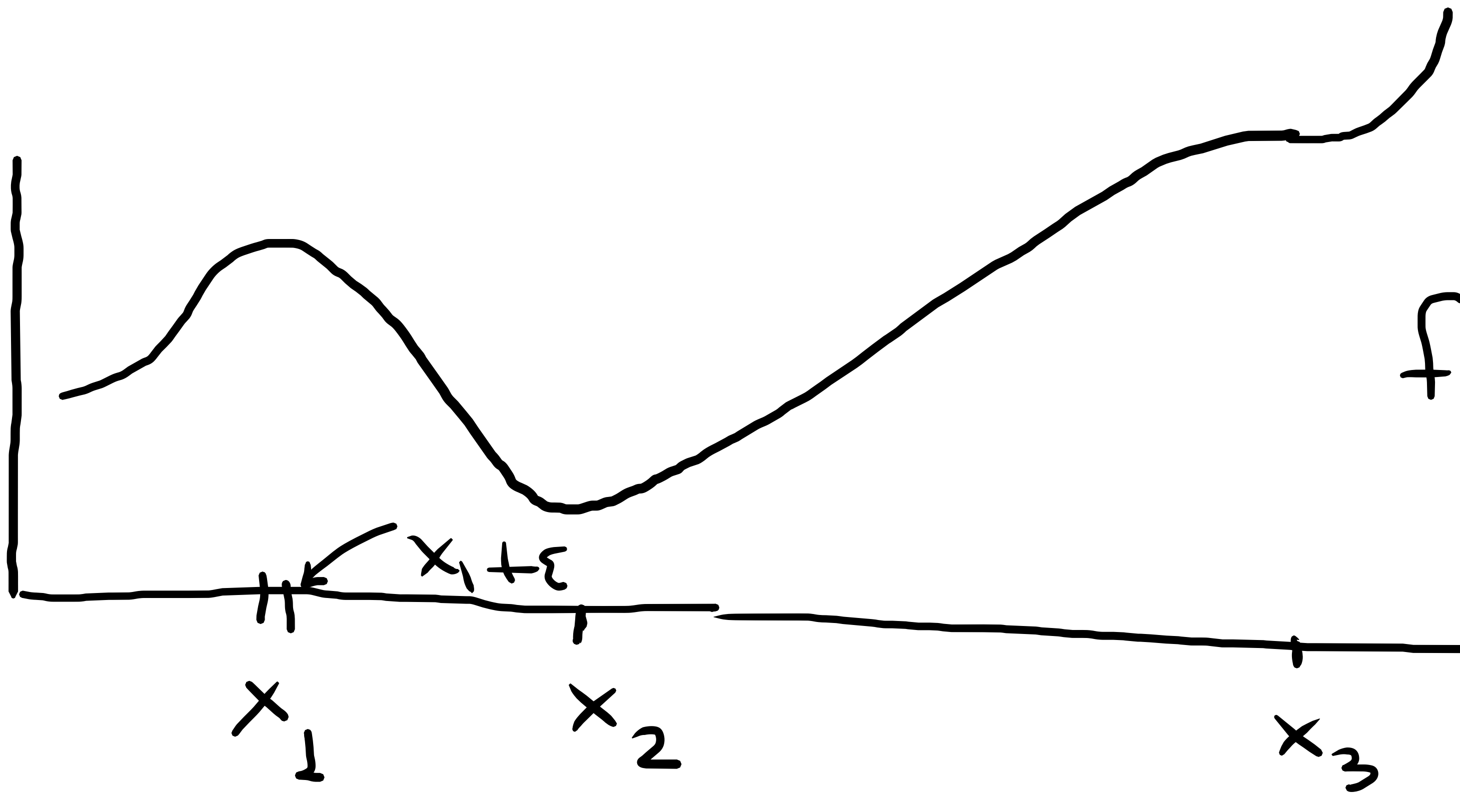
ή και από $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ldots, \ddot{x}_n$

ή και $\dddot{x}_1, \dddot{x}_2, \ldots, \dddot{x}_n$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0) \\ x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T) \end{array}\right\}$$ δοσμένα $\longrightarrow$ αναζητούμε τις $x_i(t)\ \forall i$ για $t \in [0, T]$

$$S[x_i(t)] = \int_0^T dt\, L(x_i, \dot{x}_i, t)$$

στάσιμο συνάρτηση 1 μεταβλητής $f(x)$



$$f(x_1+\varepsilon) - f(x_1) \sim O(\varepsilon^2)$$

$$f(x) \underset{x \simeq x_a}{\cong} f(x_a) + f'(x_a)(x-x_a) + \frac{f''(x_a)}{2}(x-x_a)^2 + \dots$$

Στάσιμο συνάρτησης πολλών μεταβλητών

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ είναι στάσιμο σημ. της συναρτ. f

αν :

$$f(x_{10}+\varepsilon_1, x_{20}+\varepsilon_2, \dots, x_{n0}+\varepsilon_n) - f(x_{10}, \dots, x_{n0})$$

$$= O(\varepsilon_i^2) \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_{17}^2$$

$$\varepsilon_{23}\varepsilon_3$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{10}, \dots x_{n0}) + (x_1 - x_{10}) \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_{10} \dots x_{n0}}$$

$$+ (x_2 - x_{20}) \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_{10}, \dots x_{n0}} + \dots$$

$$S = S[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] = \int_0^T L\,dt$$

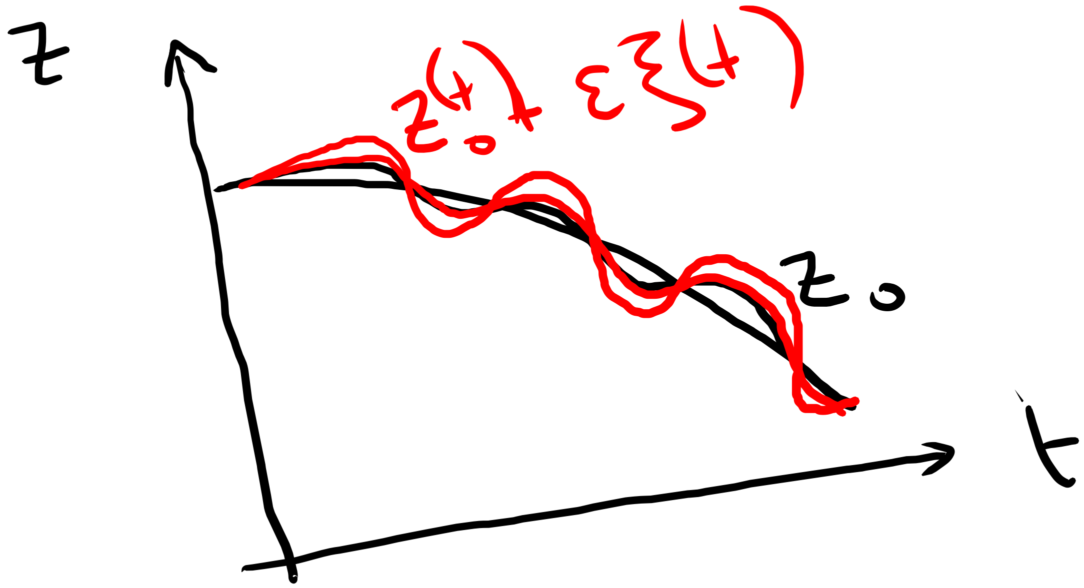
$$S[x_1(t) = x_{10}(t) + \varepsilon \xi_1(t),\ x_2(t) = x_{20}(t) + \varepsilon \xi_2(t), \ldots]$$

$$= S[x_{10}(t), x_{20}(t), \ldots x_{n0}(t)] + O(\varepsilon^2)$$

αλλαγές 2ης τάξης

Θεωρώ τις $x_{10}(t), x_{20}(t), \ldots, x_{n0}(t)$ ως εκείνες τις ιδιαίτερες συναρτήσεις καθιστών τη δράση S στάσιμη.

που → φυσική κίνηση του συστήμ.



$$S[z_0] = 5$$

$$S[z_0 + \varepsilon\xi] = 5.3$$

$$S[z_0 + 2\varepsilon\xi] = 5.6$$

$$\Downarrow$$

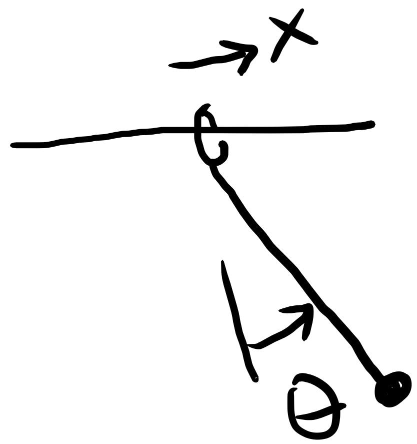
όχι z_0 η σωστή

$$S[z_0'] = 10$$

$$S[z_0' + \varepsilon\xi'] = 10.2$$

$$S\left[z_0' + \frac{\varepsilon}{10}\xi'\right] = 10 + \frac{0.2}{100} = 10.002$$

z_0' μάλλον η σωστή



δεν με ενδιαφέρει

τι συντεταγμ.

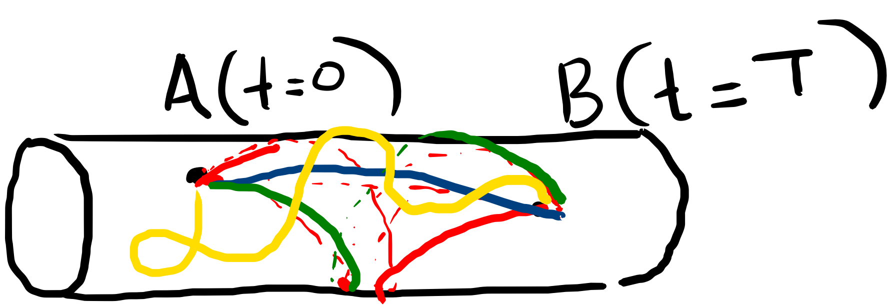
χρησιμ. για να

περιγράψω

την κίνηση

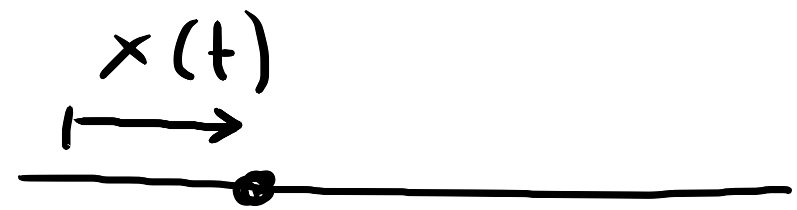
του συστημ.

πολλές δυνατές κινήσεις



ελ. σωματίδιο σε 1-D (παράδειγμα I)

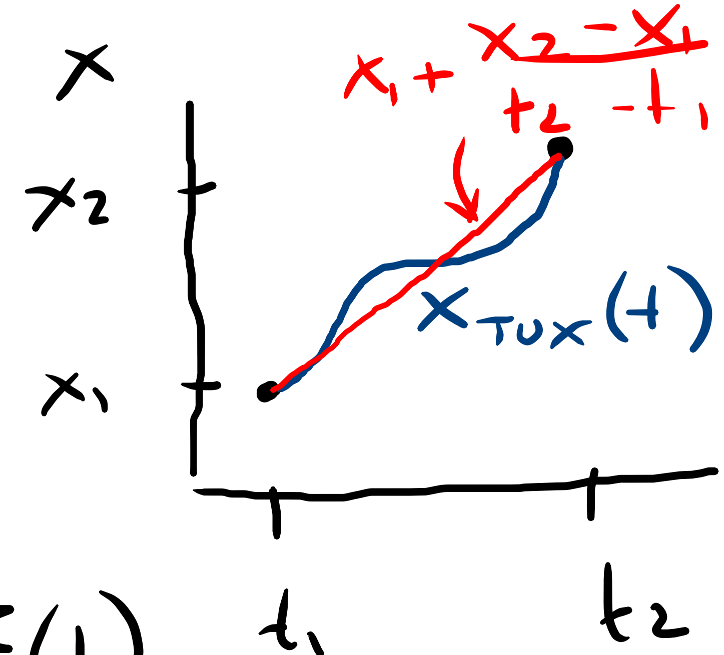
$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$



$$S[x_{τυχ}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_{τυχ}(t)\right)^2 dt$$

$$\left.\begin{aligned} x_{τυχ}(t_1) &= x_1 \\ x_{τυχ}(t_2) &= x_2 \end{aligned}\right\} \text{δοσμένα}$$

$$x_1 + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) = x_0(t)$$



$$x_{τυχ} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) + \varepsilon\, \xi(t)$$

$$\dot{x}_{τυχ} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \varepsilon\, \dot{\xi}$$

$$\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$$

$$\dot{x}_{TUX} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \varepsilon \dot{\xi}$$

$$(\dot{x}_{TUX})^2 = \underbrace{\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)^2} + 2\varepsilon \dot{\xi} \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right) + \varepsilon^2 \dot{\xi}^2$$

$\xi_1 = \xi_2 = 0$

$$S[x_{TUX}(t)] = S[x_0] + 2\varepsilon \frac{1}{2} m \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \dot{\xi}(t)\,dt}_{0}$$

$$\downarrow$$

$$\int \frac{1}{2} m (\dot{x}_0)^2 \qquad + \varepsilon^2 \ldots\ldots$$

$$\downarrow$$

$$S[x_{TUX}] = S[x_0] + \varepsilon^2 \ldots\ldots$$

$O(\varepsilon) = 0$

$\Rightarrow x_0$ είναι ~~H~~ κίνηση

$$\frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \dot{\xi}^2\,dt$$

σωματίδιο ελεύθ. σε 3-D

$$\int \dot{\vec{\xi}}\, dt = \int \frac{d\vec{\xi}}{dt}\, dt = \int d\vec{\xi} = \vec{\xi}(t_2) - \vec{\xi}(t_1) = \vec{0}$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{x}}\right)^2$$

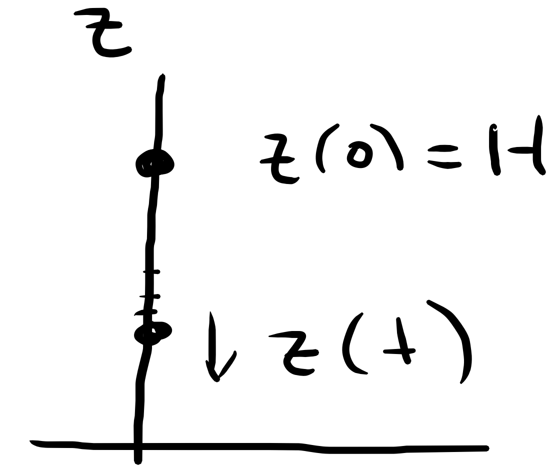
$$\vec{x}(t) = \underbrace{\vec{x}_1 + \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}(t - t_1)}_{\vec{x}_0(t)} + \varepsilon\, \vec{\xi}(t)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{x}(t_1) \\ \vec{x}_2 &= \vec{x}(t_2) \end{aligned}\right\} \text{δοσμ}$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}\right)^2 + \frac{1}{\cancel{2}} m\, \cancel{2} \varepsilon\, \dot{\vec{\xi}} \cdot \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} + \frac{1}{2} m\, \varepsilon^2 \left(\dot{\vec{\xi}}\right)^2$$

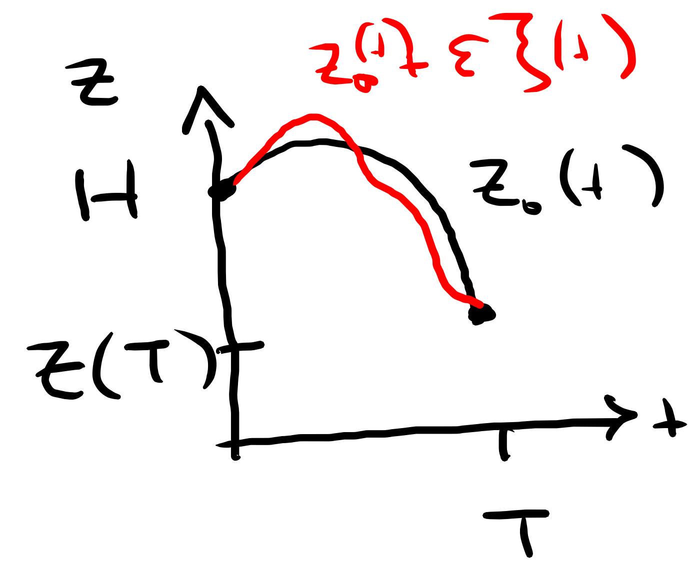
$$S[\vec{x}(t)] = S[\vec{x}_0] + \cancel{\varepsilon m \ldots \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{\xi}}\, dt} + \varepsilon^2 \ldots$$

σώμα σε ελευθ. πτώση στο ομογ. βαρ. πεδίο



$$L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - m g z$$

$$z(t) = z_0(t) + \varepsilon \xi(t)$$



αρχή στάσ. δράσης ⇒

$\varepsilon \ll\ ?$

$$S[z(t)] - S[z_0(t)] = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\forall \xi(t)$$

$$\left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \leftarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathcal{O}(\varepsilon^2)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{O}(\varepsilon) = 0$$

$\uparrow$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{S[z_0 + \varepsilon\xi] - S[z_0]}{\varepsilon}$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{z}_0 + \varepsilon \dot{\xi} \right)^2 - mg \left(z_0 + \varepsilon \xi \right)$$

$$S[z = z_0 + \varepsilon \xi] - S[z_0] =$$

$$\int_0^T dt \left\{ \cancel{\left[\frac{1}{2} m \dot{z}_0^2 - mg z_0 \right]} + \varepsilon \left[m \dot{z}_0 \dot{\xi} - mg \xi \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{m}{2} \dot{\xi}^2 \right] \right\} -$$

$$\int_0^T dt \cancel{\left[\frac{1}{2} m \dot{z}_0^2 - mg z_0 \right]} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Θέλω να είναι ταυτοτικά 0 ο όρος τάξης $O(\varepsilon)$:

$$\int_0^T dt\left(m\,\underbrace{\dot z_0\,\dot\xi}\; - mg\xi\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\dot z_0\,\xi) - \ddot z_0\,\xi$$

$$\underbrace{\int_0^T dt\, m\,\frac{d}{dt}(\dot z_0\,\xi)}_{0 \quad \xi(0)=\xi(T)=0} - \underbrace{\int_0^T dt\,\overbrace{(m\ddot z_0 + mg)}^{0}\,\xi}_{0\ \forall\xi}$$