Δευτέρα 30-5 (19η διάλεξη)

Χαμιλτονιανός φορμαλισμός

γιατί υπάρχει ανάγκη
πως δουλεύει
τι καινούργιες ιδιότητες έχει;
ποια τα νέα οφέλη;

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} \qquad L(q,\dot{q},t)$$

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \leftarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t+\delta t) = q(t) + \frac{dq}{dt}\delta t \\ p(t+\delta t) = p(t) + \frac{dp}{dt}\delta t \end{array} \right.$$

$$\dot{q}(t+\delta t) \longleftrightarrow p(t+\delta t) = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right|_{t+\delta t}$$

$$\frac{dq}{dt} = g_q(q,p) \qquad \frac{dp}{dt} = g_p(q,p)$$

$$\left\{ \begin{aligned} q(t+\delta t) &= q(t) + g_q\,\delta t \\ p(t+\delta t) &= p(t) + g_p\,\delta t \end{aligned} \right\} \ldots$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p) \end{aligned} \right]$$

ποιά είναι η συνάρτ. H ?

στο L φορμ κλ.

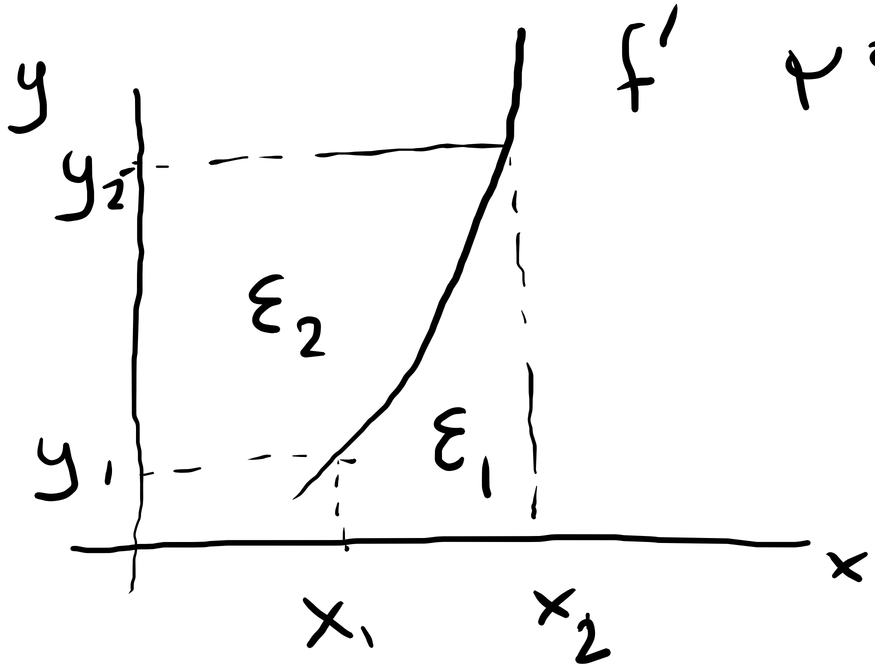
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

μαθημ. πρόβλημα

έστω $y = \frac{df}{dx}$: $f(x)$ $\longrightarrow$ ποια είναι η συνάρτηση $h(y)$!

$$x = \frac{dh}{dy}$$

μετασχηματισμός Legendre



f' μονότονη $\;\;\;\; y = \dfrac{df}{dx} = f'$

η f' είναι αντιστρέψιμη

$$y = df/dx \longleftrightarrow x = dh(y)/dy$$

$$x_2 y_2 - x_1 y_1 = E_1 + E_2 = \int_{x_1}^{x_2} f' dx + \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} h' dy}_{E_2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} df + \int_{y_1}^{y_2} dh = f(x_2) - f(x_1) + h(y_2) - h(y_1)$$

$$f(x_2)+h(y_2)-x_2y_2 = f(x_1)+h(y_1)-x_1y_1$$

$f(x)+h(y)-xy$ = σταθερά ανεξάρτητη του σημείου (x,y)

$h(y) = xy - f(x) + C$ ← άχρηστη αφού την καινούργ. συνάρτ. h θα την υποβάλουμε σε παραγώγιση

$$\frac{dh}{dy} = ?x$$

$$\frac{dh}{dy} = \frac{d(xy-f)}{dy}$$

$$= \underline{\frac{dx}{dy}y} + x - \underline{\frac{df}{dy}}$$

$$\frac{dh}{dy} = \cancel{\frac{dx}{dy}\, y} + x - \underbrace{\frac{df(x)}{dy}}_{\cancel{\underbrace{\frac{df(x)}{dx}}_{y}\, \frac{dx}{dy}}}$$

$$y = y(x)$$

$$x = x(y)$$

$$= x \quad \checkmark \quad !$$

$$p = \frac{\partial L(q, \underline{\underline{\dot q}}, t)}{\partial \dot q}\bigg|_{q,t}$$

$$f(x) \longrightarrow df(x)/dx = y$$

$$h(y) \longrightarrow dh(y)/dy = x$$

έχουμε κατασκευάσει για νέα συνάρτηση

την $H(q, \underline{\underline{p}}, t)$

ώστε $\underline{\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}\Big|_{q,t}}$

$$\underline{H} = \underline{p\dot q - L} \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial p}\bigg|_{q,t} = \dot q \ ?$$

$$p\,\dot q(q,p,t) - L(q, \dot q(q,p,t), t)$$

$$H = p\dot{q} - L$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{q,t} = \dot{q} + p\left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right|_{q,t} - \left.\frac{\partial L(q, \dot{q}(q, \underline{p}, t), t)}{\partial \underline{p}}\right|_{q,t}$$

$$= \dot{q} + \cancel{p\left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right|_{q,t} - \underbrace{\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right|_{q,t}}_{p}\left.\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right|_{q,t}}$$

$$= \dot{q} \quad \checkmark \; !$$

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}\Big|_{q,t}$$

$$\dot p = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (\text{E-L}) \quad *$$

$$L(q, \dot q(q, p, t), t)$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q}\Big|_{p,t}} = \frac{\partial}{\partial q}(p\dot q - L)\Big|_{p,t} = \cancel{p\frac{\partial \dot q}{\partial q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\Big|_{\dot q,t} - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{p}\Big|_{q,t}\frac{\partial \dot q}{\partial q}}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q}\Big|_{\dot q,t} = \boxed{-\dot p}$$

Εξισώσεις Hamilton (αντί της εξίσωσης E-L)

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \xleftarrow[\text{Legendre}]{\text{μετασχ.}}$$

εναλλακτική έκφραση του συμβολισμού $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

= επαναγραφή της E-L (δυναμικός νόμος)

$$H = p\dot{q} - L$$

όπου πλέον $H(q,p,t)$

Φύγαμε από τον θεσεογραφικό χώρο
(q,t)

πήγαμε στο χώρο των φάσεων (q,p,t)

Ο τρόπος που εξελίσσεται το σύστημα είναι αυτός των δυναμικών εξισώσεων του Hamilton

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial H/\partial p \\ -\partial H/\partial q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_q(q,p) \\ F_p(q,p) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{X} = \vec{F}$$ (αριστοτελ. μηχανική)
!

Τεράστια αφαίρεση με το πλεονέκτημα των Α΄ τάξεως εξισώσεων πλέον.

μαθηματικό παράδειγμα μετασχ. Legendre.

$f(x)$ $\quad f'$ μονότονη $\longrightarrow h(y)$

$$y = f'(x) \qquad\qquad x = h'(y)$$

έστω $f(x) = \sin x \qquad \underline{x \in [0, \pi/2)}$

$$\underline{y} = \frac{df}{dx} = \underline{\cos x}. \longrightarrow x = \cos^{-1} y$$

$$h(y) = xy - f(x) = x(y)\, y - f(x(y))$$

$$= xy - \sin x = (\cos^{-1} y)\, y - \underbrace{\sin(\cos^{-1} y)}_{\sqrt{1-y^2}} = y \cos^{-1} y - \sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{dh}{dy} = \left(y\cos^{-1}y - \sqrt{1-y^2}\right)' = \cos^{-1}y - y\cancel{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}} \cancel{+ \frac{2y}{2\sqrt{1-y^2}}}$$

$$= \cos^{-1}y = x \checkmark$$

$y = \cos x$

$\cos^{-1}y = x$

1ο φυσικό σύστημα

ελ. σωματίδιο σε 1-D

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \longrightarrow \underline{\dot{x} = p/m}$$

$$H = p\dot{x} - L(\dot{x}) = p\,\frac{p}{m} - \frac{1}{2} m \left(p/m \right)^2 = p^2/2m$$

Χαμιλτ. του ελευθ. σωματ.

εξ. Χάμιλτον για ελευθ. σωμ. σε 1-D $\qquad H = p^2/2m$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m$$ (επανάληψη της σχέσης $p = m\dot{x}$)

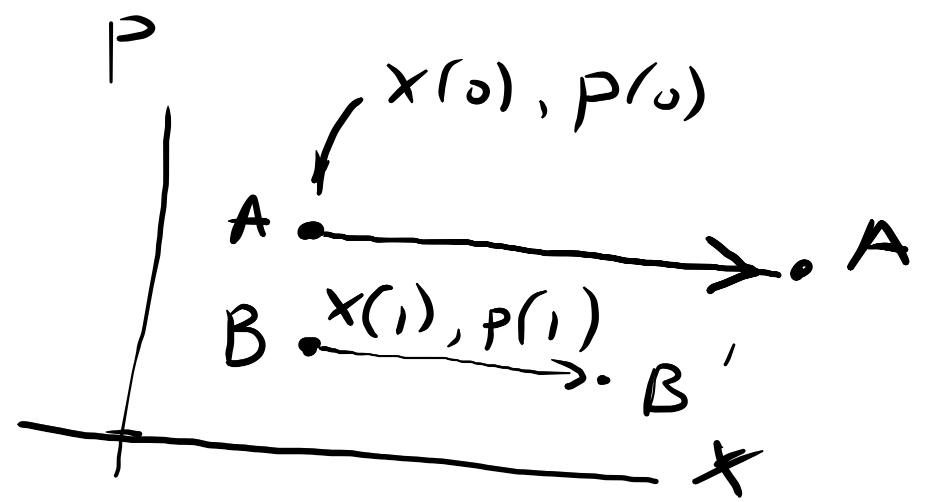
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p = \text{σταθ}$$

$$\dot{x} = p/m = \text{σταθ}$$

$$x(t) = x(0) + \frac{p}{m}t$$

$$p(t) = p(0)$$

$$x(t) = x(0) + \frac{p(0)}{m}t$$



χ. φάσ.

2ο παράδειγμα

αρμ. ταλαντωτής σε 1-D

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \implies \dot{x} = p/m$$

$$H = p\dot{x} - L = p\left(p/m\right) - \left[\frac{1}{2} m \left(p/m\right)^2 - \frac{1}{2} k x^2\right]$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m \quad (1) \qquad H = p^2/2m + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \,. \quad (2)$$

$$\dot{(1)} \quad \ddot{x} = \dot{p}/m \overset{(2)}{=} -\frac{kx}{m} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$(1,2) \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p/m \\ -kx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} = \mathbb{A}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}$$

διαν. θέσης στο χ.φ.

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \mathbb{A}\vec{\xi} \qquad \frac{dy}{dt} = \alpha y \to y(t) = \underline{e^{at} y(0)}$$

$$\frac{d\vec{\xi}(t)}{dt} = A\,\vec{\xi}(t)$$

A : σταθερός 2x2 πίνακας

$$\vec{\xi}(t) = e^{At}\,\vec{\xi}(0)$$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$$

$$\dot{\vec{\xi}}(t) = \overset{\bullet}{\left[e^{At}\,\vec{\xi}(0)\right]}$$

$$= A\,\underbrace{e^{At}\,\vec{\xi}(0)}_{\vec{\xi}(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = 0 + A + A^2\frac{2t}{2!} + A^3\frac{3t^2}{3!} + \dots + A^n\frac{n t^{n-1}}{n!} + \dots$$

$$= A\left[I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \dots + A^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots\right] = Ae^{At}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{bmatrix} \qquad k/m = \omega^2$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -k/m & 0 \\ 0 & -k/m \end{bmatrix} = -\omega^2 I$$

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots + A^n\frac{t^n}{n!} + \cdots$$

$$= \left(I + \overset{-\omega^3 I}{A^2}\frac{t^2}{2!} + \overset{+\omega^4 I}{A^4}\frac{t^4}{4!} + \cdots + A^{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \cdots \right)$$

$$+ \left(At + A^3\frac{t^3}{3!} + A^5\frac{t^5}{5!} + \cdots + A^{2n+1}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right)$$

$$= I\left(1 - \omega^2\frac{t^2}{2!} + \omega^4\frac{t^4}{4!} - \omega^6\frac{t^6}{6!} + \cdots\right) \leftarrow$$

$$+ \frac{A}{\omega}\left(\omega t + \cancel{\omega}\,\omega\, \overset{-\omega^2}{A^2}\frac{t^3}{3!} + \omega\, \overset{+\omega^4}{A^4}\frac{t^5}{5!} + \cdots \right) \leftarrow$$

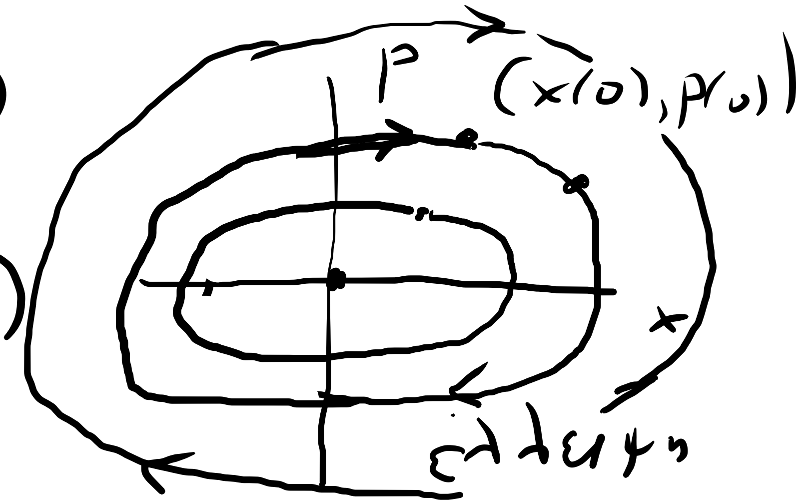
$$\omega t - \omega^3 t^3/3! + \omega^5 t^5/5! + \cdots \leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\mathbb{1} \cos\omega t + \frac{A}{\omega} \sin\omega t \right)} \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{m\omega} \sin\omega t \\ -\frac{k}{\omega} \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{bmatrix}$$

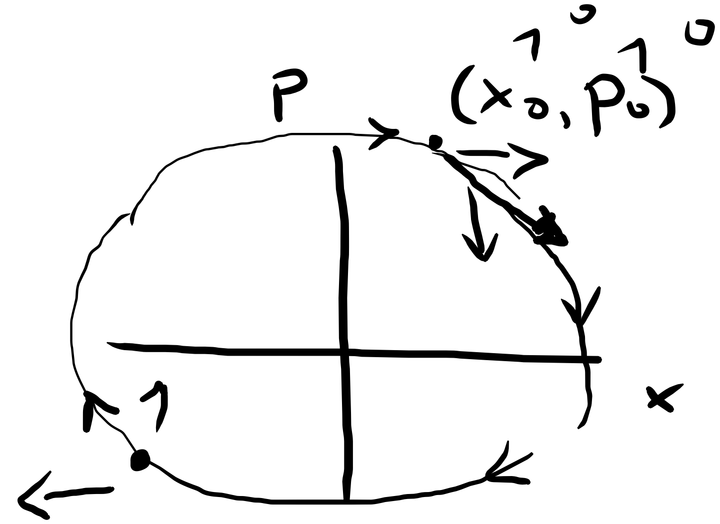
$$x(t) = \cos\omega t \; x(0) + \frac{1}{m\omega} \sin\omega t \; p(0)$$

$$p(t) = -\frac{k}{\omega} \sin\omega t \; x(0) + \cos\omega t \; p(0)$$



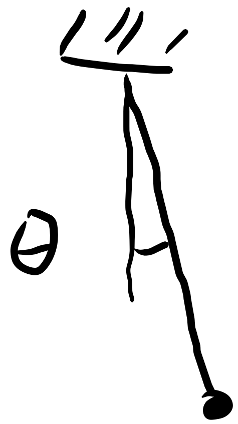
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$



$x(0) < 0 \ , \ p(0) < 0$

3ο φυσ. σύστημα : εκκρεμές σε κατακ. επίπεδο



$$L = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 - (-mg\ell\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta$$

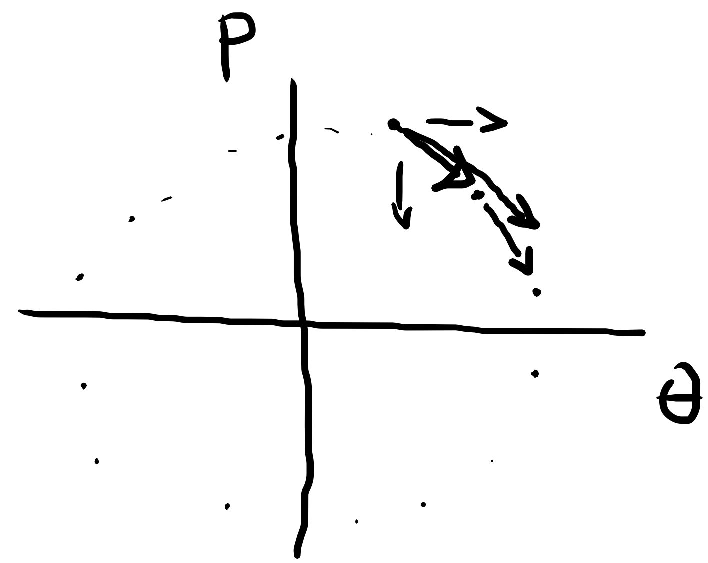
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = p/m\ell^2$$

$$H = p\left(\frac{p}{m\ell^2}\right) - \left[\frac{1}{2} m \ell^2 \left(\frac{p}{m\ell^2}\right)^2 + mg\ell\cos\theta\right] =$$

$$= \frac{p^2}{2m\ell^2} - mg\ell\cos\theta$$

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

εξ. Hamilton: $\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/ml^2$



$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}}{ml^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$ (την κλασ. εξ. κιν. του εκκρεμ.)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d\,H(\theta,p)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)$$

$$= 0 \; !$$

H = σταθ. της κίνησης

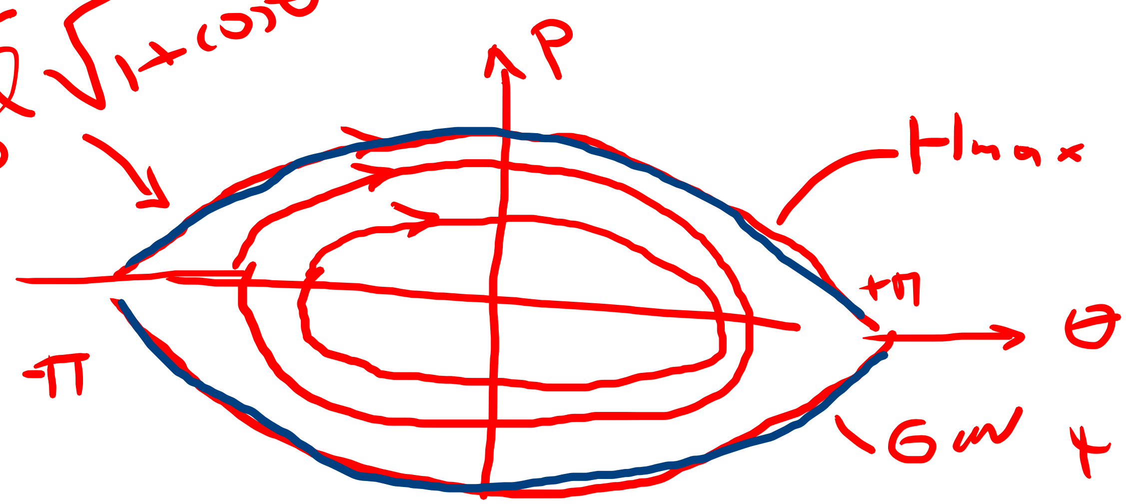
$$\rightarrow H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta = \text{[illegible]}$$

$$mgl \quad (\theta_0 \simeq \pi,\ p_0 \cong 0)$$

$$p = \pm\sqrt{2ml^2\left(H + mgl\cos\theta\right)}$$

$$(\theta_0, p_0)$$

$$\pm\sqrt{2ml^2 \cdot mgl}\sqrt{1+\cos\theta}$$



Σύνοψη

$$L(q, \dot{q}, t) \xrightarrow[\text{Legendre}]{\text{μετασχ.}} H \ (\text{χώρος φάσεων})$$

χαμιλτονιανή

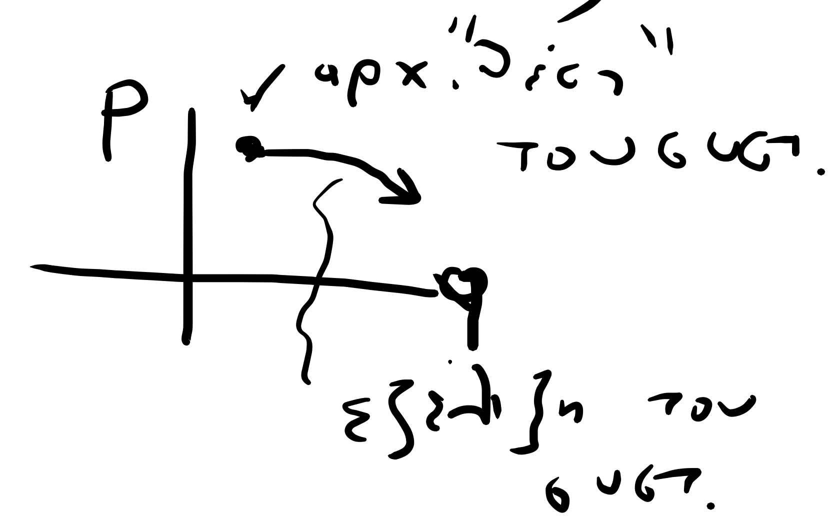
$$H = p\,\dot{q}(q,p,t) - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)$$

Η νέα δυναμική (όχι 2ης τάξης
αλλά είναι 1ης τάξης)

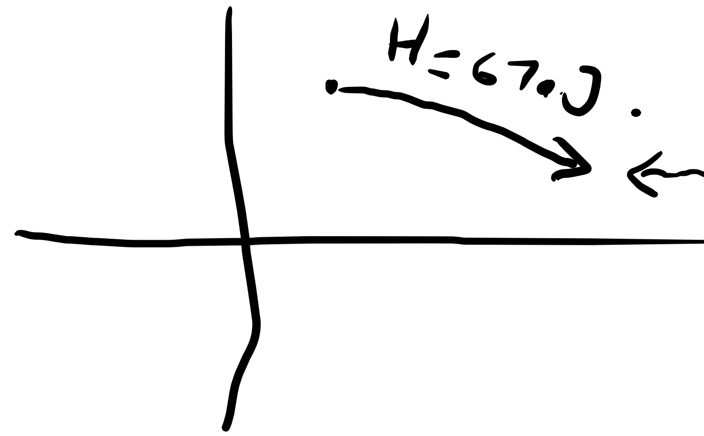
εξισ. Hamilton:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\partial H / \partial q$$



H: σταθερά της κίνησης



$p(q)$ θουρύνται σταθ. τιμή του H.

$H(t)$ εκκρεμές το τρελλό