Μηχανική ΙΙ 23/4/2026

Διάλεξη 16

- Γενική αντιμετώπιση συστήματος που εκτελεί μικρές ταλαντώσεις

- Περίπτωση ευστάθειας

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N) \xrightarrow[\text{την ισορρ.}]{\text{γύρω από}} L_{\gamma\rho}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

$$\xi_i = q_i - q_{ie}$$ θέση ισορροπίας

Τελικά η Λαγκρατζιανή που θα χρησιμοποιήσουμε, η γραμμικοποιημένη, θα είναι:

$$L_{\gamma\rho} = \frac{1}{2} \dot{\Xi}^T \mathbb{M} \dot{\Xi} - \frac{1}{2} \Xi^T \mathbb{K} \Xi \qquad \Xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ισχύουν σωστή και αν δεν είναι συμμετρικοί οι $\mathbb{M}, \mathbb{K}$.

M_{ij}, K_{ij} έχουν πραγμ. στοιχεία και είναι συμμετρικοί

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για ένα τέτοιο σύστημα θα είναι:

$$\mathbb{M} \ddot{\Xi} = -\mathbb{K} \Xi \qquad (1)$$

υποθέτοντας τις $\mathbb{M}, \mathbb{K}$ συμμετρικοί.

Οι λύσεις θα έχουν την μορφή $\Xi(t) = \Xi_0 e^{i\omega t}$ (2), ω: άγνωστο

Θεώρημα - όχι υπόθεση εργασίας.

$$-\mathbb{M}\omega^2 \Xi_0 = -\mathbb{K}\Xi_0 \Rightarrow \underbrace{(\mathbb{K}-\mathbb{M}\omega^2)}_{\text{επίπεδα}}\Xi_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\end{bmatrix} = \mathbb{O} \Rightarrow$$

Θέλουμε τουλάχιστον ένα από τα επίπεδα να είναι γραμμικά εξαρτημένο από κάποιο άλλο.

$$\Rightarrow \det(\mathbb{K}-\mathbb{M}\omega^2)=0$$

πολυώνυμο N βαθμού

δηλ. δεν υπάρχει αντίστροφος πίνακας. Αν υπήρχε θα έπρεπε Ξ_0 να είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Η λύση του $\det(\mathbb{K}-\mathbb{M}\omega^2)=0$ είναι οι ρίζες ενός πολυωνύμου βαθμού n.

(1) $\mathbb{M}\omega^2 \Xi_0 = \mathbb{K}\Xi_0$ (δηλ. $\exists\, \Xi_0, \omega^2$ τέτοια ώστε $\mathbb{M}\omega^2 \Xi_0 = \mathbb{K}\Xi_0$)

ψάχνουμε διάνυσμα Ξ_0 που αν δράσει πάνω του το $\mathbb{M}\omega^2$ ή δράσει πάνω του το $\mathbb{K}$, δύο διαφορετικοί πίνακες, θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Όσο στρίβει το $\mathbb{M}$ το Ξ_0 θα το στρίψει και το $\mathbb{K}$ και τα τελικά διανύσματα θα ~~είναι~~ είναι παράλληλα με συντελεστή αναλογίας ω^2.

Θα αντιμετωπίσουμε τα $\mathbb{M}$, $\mathbb{K}$ ως πίνακες συμμετρικούς με πραγματικά στοιχεία, αλλά $\omega^2, \Xi_{0a} \in \mathbb{C}$

$$\Xi_0^\dagger \cdot (1): \quad \omega^2 \Xi_0^\dagger \mathbb{M} \Xi_0 = \Xi_0^\dagger \mathbb{K} \Xi_0 \quad (3)$$

$$(1)^\dagger \cdot \Xi_0: \quad (\omega^2)^* \Xi_0^\dagger \mathbb{M}^\dagger \Xi_0 = \Xi_0^\dagger \mathbb{K}^\dagger \Xi_0 \quad (4)$$

Ερμιτιανό συζυγές: $((1)^T)^*$

(άρα $\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix}$)

όμως ο $\mathbb{K}$ είναι πραγματικός και συμμετρικός, όπως και ο $\mathbb{M}$. Άρα:

$$\mathbb{M}^{+} = \mathbb{M} \quad \text{και} \quad \mathbb{K}^{+} = \mathbb{K} \qquad (5)$$

Αφού τα δεξιά μέλη είναι ίδια, και τα αριστερά μέλη είναι ίδια.

$$\omega^2 \Xi_0^{+} \mathbb{M} \Xi_0 = (\omega^2)^* \Xi_0^{+} \mathbb{M} \Xi_0$$

$$(3)-(4) \xrightarrow{(5)} \left[\omega^2 - (\omega^2)^*\right] \Xi_0^{+} \mathbb{M} \Xi_0 = 0 \Rightarrow$$

→ → είτε $\omega^2 \in \mathbb{R}$
$(\omega^2 = (\omega^2)^*)$

→ είτε $\underbrace{\Xi_0^{+} \mathbb{M} \Xi_0}_{>0} (=0)$?

πίνακας κινητικής ενέργειας

Αν δεν είναι όλες οι ταχύτητες μηδέν, τότε αυτό βγαίνει θετικό

→ Ο $\mathbb{M}$ είναι θετικός

Άρα μοναδική επιλογή $\boxed{\omega^2 \in \mathbb{R}}$

$\exists\ \omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2 \in \mathbb{R}$ και αντίστοιχως

$\Xi_0^{(1)}, \Xi_0^{(2)}, \ldots, \Xi_0^{(n)}$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{M}\, \omega_i^2\, \Xi_0^{(i)} = \mathbb{K}\, \Xi_0^{(i)}$$

> τρόποι ταλάντωσης

Θέλουμε να δούμε αν αυτοί οι τρόποι ταλάντωσης έχουν κάτι ιδιαίτερο.

Είναι $\Xi_0^{(2)T} \omega_1^2 \mathbb{M} \Xi_0^{(1)} = \Xi_0^{(2)} \mathbb{K} \Xi_0^{(1)}$

και $\omega_2^2 \mathbb{M} \Xi_0^{(2)} = \mathbb{K} \Xi_0^{(2)} \xrightarrow{T}$

$$\longrightarrow \omega_2^2 \Xi_0^{(2)T} \mathbb{M}^T = \Xi_0^{(2)T} \mathbb{K}^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_2^2 \Xi_0^{(2)T} \mathbb{M} \Xi_0^{(1)} = \Xi_0^{(2)T} \mathbb{K} \Xi_0^{(1)}$$

Αν μαζέψουμε τις δύο σχέσεις:

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2)\, \Xi_0^{(2)T} \mathbb{M} \Xi_0^{(1)} = 0$$

Αν δοκίμαζα το ίδιο "παιχνίδι" με i, j αντί για 1, 2:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\, \Xi_0^{(i)T} \mathbb{M} \Xi_0^{(j)} = 0$$

Οι διάφοροι τρόποι ταλάντωσης έχουν μια ορθογωνιότητα μεταξύ τους με <u>μετρική</u> τον πίνακα $\mathbb{M}$.

$$\Rightarrow \Xi_0^{(i)T} \mathbb{M} \Xi_0^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \neq j \\ (>0) & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Το πλήθος των συχνοτήτων είναι όσοι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος

Έστω $\Xi_0^{(i)T} \mathbb{M} \Xi_0^{(i)} = S$

$\Xi_0^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$ ← από την επίλυση των $n-1$ εξισώσεων

$$(\mathbb{K} - \mathbb{M}\omega_i^2)\, \Xi_0^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

:)

αν επαναορίζω (επανακανονικοποιήσω) ή νορμαλίζω το $\Xi_0^{(i)}$

$$\hat{\Xi}_0^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Xi_0^{(i)}$$

$$\hat{\Xi}_0^{(i)\,T} \mathbb{M} \hat{\Xi}^{(i)} = \frac{1}{5} \underbrace{\Xi_0^{(i)\,T} \mathbb{M} \Xi_0^{(i)}}_{5} = 1$$

Έτσι λοιπόν έχουμε την απλοποίηση πως

$$\hat{\Xi}_0^{(j)\,T} \mathbb{M} \hat{\Xi}_0^{(i)} = \delta_{ij}$$

Δηλαδή οι τρόποι ταλάντωσης περιγράφονται από ορθοκανονικό σύστημα.

$\longrightarrow$ από εδώ και πέρα δεν θα βάζουμε ^ (αμελητέα).

Έχουμε:

$$\omega_i^2 \; \Xi_0^{(j)\,T} \mathbb{M} \Xi_0^{(i)} = \Xi_0^{(j)\,T} \mathbb{K} \Xi_0^{(i)}$$

~~Χωρίς~~ αθροιστική σύμβαση $\Rightarrow \omega_i^2 \delta_{ij} = \Xi_0^{(j)\,T} \mathbb{K} \Xi_0^{(i)}$

Άρα $\Xi_0^{(j)\,T} \mathbb{K} \Xi_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \bigcirc \\ & \omega_2^2 \ddots & \\ \bigcirc & & \omega_n^2 \end{bmatrix} = \Omega^2$

διαγώνιος πίνακας

Κατασκευάζουμε:

$$\mathbb{\Xi} = \left[\Xi_0^{(1)} \; \Xi_0^{(2)} \; \cdots \; \Xi_0^{(n)} \right]$$

Θέλουμε να δούμε ποιός είναι ο πίνακας:

$$\Phi^T \mathbb{M} \Phi = ?$$

Αρχικά

$$\mathbb{M}\Phi \stackrel{?}{=} \left[\left[\mathbb{M}\Phi_0^{(1)}\right] . \left[\mathbb{M}\Phi_0^{(2)}\right] \cdots \left[\mathbb{M}\Phi_0^{(n)}\right] \right]$$

$$\Phi^T \mathbb{M} \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \cdots \end{bmatrix} = \mathbb{1}$$

Δηλ.

$$\boxed{\Phi^T \mathbb{M} \Phi = \mathbb{1}}$$

Κατ' αναλογία θέλουμε να βρούμε πόσο κάνει

$$\boxed{\Phi^T \mathbb{K} \Phi = \Omega^2}$$

Τώρα θα κάνουμε μια αλλαγή βάσης / αλλαγή συντεταγμένων.

Ξ τυχαίο διάνυσμα στήλη, X προκύπτον διάνυσμα στήλη.

$$\Xi = \Phi X \longrightarrow X = \Phi^{-1} \Xi$$

σαν μετατροπή συντεταγμένων από τις Ξ στις X.
Από σίγουρα γίνεται γιατί Φ φτιάχνεται από γραμμικά ανεξάρτητους τρόπους ταλάντωσης Ξ_0, άρα έχει σίγουρα αντίστροφο.

Η γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή μας ήτανε

$$L_{γρ} = \frac{1}{2}\dot{\Xi}^T \mathbb{M} \dot{\Xi} - \frac{1}{2}\Xi^T \mathbb{K} \Xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_{γρ} = \frac{1}{2}\dot{X}^T \Pi^T \mathbb{M} \Pi \dot{X} - \frac{1}{2} X^T \Pi^T \mathbb{K} \Pi X$$

$$L_{γρ} = \frac{1}{2}(\dot{x}_1\ \dot{x}_2 \cdots \dot{x}_n)\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n\end{bmatrix} - \frac{1}{2}[x_1\ x_2 \cdots x_n]\begin{pmatrix}\omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \omega_n^2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$$

(*) ... $x_1, x_2,$ ...αι χρονο- ...αριμένες ...ναρτήσεις.

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \ldots + \dot{x}_n^2) - \frac{1}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \ldots + \omega_n^2 x_n^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{x}_2^2 - \omega_2^2 x_2^2) + \ldots + \frac{1}{2}(\dot{x}_n^2 - \omega_n^2 x_n^2)$$

$$= L_1(x_1, \dot{x}_1) + L_2(x_2, \dot{x}_2) + \ldots + L_n(x_n, \dot{x}_n)$$

η ανεξάρτητοι απλοί αρμονικοί ταλαντωτές!

άρα

$x_1(t) = C_1 \cos\omega_1 t + S_1 \sin\omega_1 t$

$x_2(t) = C_2 \cos\omega_2 t + S_2 \sin\omega_2 t$

$\cdots$

Όμως τι είναι <u>φυσικά</u> τα x?

$$\Xi = \Pi X$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \Bigg[\left[\Xi_0^{(1)}\right] \left[\Xi_0^{(2)}\right] \cdots \left[\Xi_0^{(n)}\right] \Bigg] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \left[x_1(t)\,\Xi_0^{(1)}\right] + \left[x_2(t)\,\Xi_0^{(2)}\right] + \dots + \left[x_n(t)\,\Xi_0^{(n)}\right]$$

πίνακες στήλες.

Ισχύει ότι $\Xi = \mathbf{\Xi} X$

οι συντελεστές $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

άρα

$$\Xi(0) = \mathbf{\Xi} X(0)$$

πραγματικές μεταβλητές κίνησης

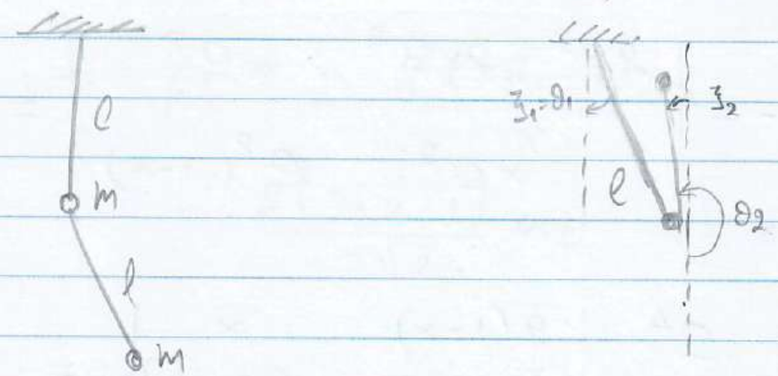
$$\dot{\Xi}(0) = \mathbf{\Xi} \dot{X}(0)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 s_1 \\ \omega_2 s_2 \\ \vdots \\ \omega_n s_n \end{bmatrix}$$

Τι και αν κάποιες συχνότητες έχουν $\omega^2 < 0$;

Τι συμβαίνει εάν $\omega_1^2 = \omega_2^2$;

(II)



$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{K} = \underline{o}^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Το $\mathbb{M}$ είναι θετικός, αφού $\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + (x-y)^2 > 0$$

Το ανάποδο του "θετικού πίνακα" είναι ο "μη θετικός πίνακας"

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbb{K} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 - y^2 \qquad \underline{\text{όχι}} \text{ θετικός}$$

Αν $\mathbb{M}$ μη θετικός $\rightarrow$ αστάθεια
θα έχουμε αρνητικές ω^2

$$\det(\mathbb{K} - \mathbb{M}\omega^2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2\underline{\Omega}^2 - 2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -\underline{\Omega} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$x = \frac{\omega^2}{\underline{\Omega}^2}$ με $\underline{\Omega}^2 = \frac{g}{l}$

Τότε

$$= \begin{vmatrix} 2\underline{\Omega}^2 - 2x\underline{\Omega}^2 & x\underline{\Omega}^2 \\ x\underline{\Omega}^2 & \underline{\Omega}^2(-1-x) \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{\Omega}^4 \begin{vmatrix} 2(1-x) & x \\ x & -1-x \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{\Omega}^4 \left(2(x-1)(x+1) - x^2 \right) =$$

$$= \underline{\Omega}^4 (2x^2 - 2 - x^2) = (x^2 - 2)\underline{\Omega}^4$$

άρα $x_\pm = \pm\sqrt{2}\,\Omega^2$.

όπου $x_\pm = \dfrac{\omega_\pm^2}{\Omega^2}$

Άρα $\omega_\pm^2 = \pm\Omega^2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \omega_+ = \pm\sqrt[4]{2}\,\Omega & \text{πραγματική συχνότητα} \\ \omega_- = \pm i\sqrt[4]{2}\,\Omega & \text{φανταστική συχνότητα} \end{cases}$$

Πριν πάρουμε την ορίζουσα είχαμε:

$$K - M\omega_\pm^2 = \Omega^2 \begin{bmatrix} 2(1-x_\pm) & x_\pm \\ x_\pm & -1-x_\pm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_\pm \\ \beta_\pm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_+ = \sqrt{2}$
$x_- = -\sqrt{2}$

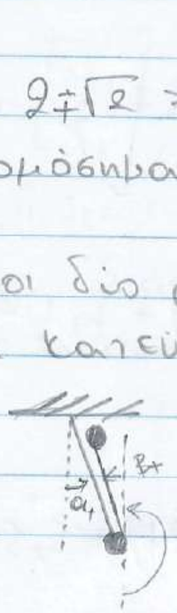
$$\Rightarrow 2(1-x_\pm)\alpha_\pm + x_\pm\beta_\pm = 0$$

$$\Rightarrow \beta_\pm = \frac{2(x_\pm - 1)}{x_\pm}\alpha_\pm =$$

$$= \frac{2(\pm\sqrt{2}-1)}{\pm\sqrt{2}}\alpha_\pm = \underbrace{(2\mp\sqrt{2})}_{>0}\alpha_\pm$$

Αφού $2\mp\sqrt{2} > 0$, τότε $\beta_\pm$ και $\alpha_\pm$ ομόσημα

Άρα οι δύο ράβδοι έχουν ~~*~~ στρίψει προς την ίδια κατεύθυνση.



άρα $\quad \Xi_0^{(+)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix} \quad \omega_+^{\,2} = \sqrt{2}\,\Omega^2$ αν $\sqrt{2} = 1.4$

$\quad\quad\; \Xi_0^{(-)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.4 \end{bmatrix} \quad \omega_-^{\,2} = -\sqrt{2}\,\Omega^2$!

άρα
$\omega_- = \pm i \sqrt[4]{2}\,\Omega$

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) - n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix} \left(c_+ \cos\left(\sqrt[4]{2}\,\Omega t\right) + s_+ \sin\left(\sqrt[4]{2}\,\Omega t\right) \right)$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 3.4 \end{bmatrix} \left(\lambda_3 e^{\sqrt[4]{2}\,\Omega t} + \lambda_4 e^{-\sqrt[4]{2}\,\Omega t} \right)$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$e^{at} = \underbrace{\cosh at}_{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}} + \underbrace{\sinh at}_{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}}$$

$$e^{-at} = \underset{(\cosh)}{\mathrm{ch}\,at} - \underset{(\sinh)}{\mathrm{sh}\,at}$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix} \left(c_1 \cos\left(\sqrt[4]{2}\,\Omega t\right) + s_1 \sin\left(\sqrt[4]{2}\,\Omega t\right) \right)$$

γράφουμε και τις μη ταλαντώσεις σε μορφή ταλάντωσης

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 3.4 \end{bmatrix} \left(c_2 \cosh\left(\sqrt[4]{2}\,\Omega t\right) + s_2 \mathrm{sh}\left(\sqrt[4]{2}\,\Omega t\right) \right)$$

Για να βρω την κίνηση πρέπει να ξέρω
C_1, S_1, C_2, S_2

Αυτά τα βρίσκω από αρχ. συνθ

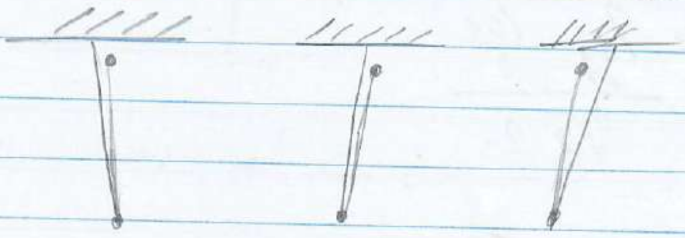
Μπορούμε να θέσουμε τέτοιες αρχ. συνθήκες ώστε $C_2 = S_2 = 0$.

Έστω $C_2 = S_2 = 0$, $S_1 = 0$, $C_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix} C_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(0) \\ \dot{\xi}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix} \sqrt[4]{2}\,\Omega\, S_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τότε αν το θέσω σε $\xi_1(0) = 1$, $\xi_2(0) = 0.6$:
η ταλάντωση του συστήματος:



με $\omega = \sqrt[4]{2}\,\Omega$.

Έστω $\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ αλλά $\begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$(S_1 = S_2 = 0)$

Τότε το διάνυσμα αυτό θα έχει και λίγο από τον άλλο τρόπο ταλάντωσης:

μικρό αλλά κακό κομμάτι

$$\begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{2} \end{bmatrix} + \beta\cdot\varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$C_1 = \alpha$ $\qquad$ $C_2 = \beta\cdot\varepsilon$

Αν $\sqrt[4]{2}\,\Omega t \simeq 10$ τότε

$$\cosh(\sqrt{2}\,\Omega t) \simeq \mathrm{ch}10 \simeq \frac{e^{10}}{2} \gg 1$$

Άρα για $t \geq \dfrac{10}{\sqrt[4]{2}\,\Omega} \simeq \dfrac{10}{1.2\,\Omega} \sim 9$ sec

η περίεργη λύση θα έχει πολλαπλασιαστεί με έναν παράγοντα e^{10}

$$\text{ταλαν} + \underbrace{\begin{bmatrix}1\\3.4\end{bmatrix}\varepsilon}_{\text{μικρό}}\beta\, \frac{e^{\sqrt[4]{2}\,\Omega t}}{2} \rightarrow \text{μεγάλο}$$

όταν πχ. $\varepsilon e^{\sqrt[4]{2}\,\Omega t} \sim 100$ αυτό θα αποκλείνει πολύ από τις "μικρές" γωνίες που λύσαμε αρχικά

$$\Downarrow$$

$$t \simeq \frac{\log_e \frac{100}{\varepsilon}}{\sqrt[4]{2}\,\Omega}$$

Αν $\varepsilon = 10^{-6}$, τότε σε $t \simeq \dfrac{20}{\sqrt[4]{2}\,\Omega}$ sec

το σύστημα θα έχει φύγει από την κατάσταση ισορροπίας.

Άρα αν υπάρχει εδώ και μία φανταστική συχνότητα, υπάρχει μία αστάθεια που ρεαλιστικά θα "σκάσει" και θα βγάλει το σύστημα από την ταλάντωση σε μικρές γωνίες.