$\boxed{\text{Ασκ } 1}$

$\mathbb{R}_S \equiv (\mathbb{R}, \tau_S)$ είναι T_4

Απόδ Έστω $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}$, τ_S-κλειστά και ξένα $\Rightarrow$

$$F_1 \subseteq \underbrace{\mathbb{R}\setminus F_2}_{\in \tau_S} \subseteq \mathbb{R}.$$

$\forall x\in F_1 : \mathcal{B}_x = \{(a,x] : a<x\}$ είναι β.π. του x $\Rightarrow$

$\forall x \in F_1 \ \exists\, a_x < x : (a_x, x] \subseteq \mathbb{R}\setminus F_2$

Όμοια: $\forall y\in F_2 \ \exists\, b_y<y : (b_y,y] \subseteq \mathbb{R}\setminus F_1$.

Θέτουμε:

$$G_1 = \bigcup_{x\in F_1}(a_x,x], \quad G_2=\bigcup_{y\in F_2}(b_y,y] \Rightarrow$$

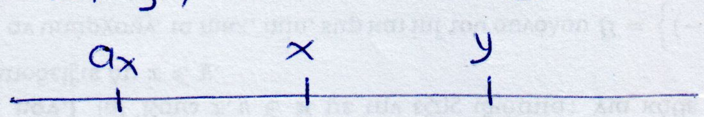
$$F_1 \subseteq \underset{\in\tau_S}{G_1} \subseteq \mathbb{R}\setminus F_2, \quad F_2\subseteq \underset{\in\tau_S}{G_2}\subseteq \mathbb{R}\setminus F_1$$

Ισχυρ: $G_1\cap G_2=\emptyset$. Με άτοπο, αν $G_1\cap G_2\neq\emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, z\in \left(\bigcup (a_x,x]\right)\cap\left(\bigcup (b_y,y]\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x\in F_1,\ y\in F_2 : z\in (a_x,x]\cap(b_y,y]\neq\emptyset$

$F_1\cap F_2=\emptyset \Rightarrow x\neq y$, έστω $x<y$.



Αν $b_y \geq x \Rightarrow (a_x,x]\cap(b_y,y]=\emptyset$, άτοπο

Αν $b_y < x \in (b_y,y] \subseteq G_2 \subseteq \mathbb{R}\setminus F_1$, άτοπο.

Άρα $G_1\cap G_2=\emptyset$.

Ασκ 2

$\mathcal{T}$ = συνήθης τοπ. του $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_S$ = τοπολ. των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων, $\mathbb{R}_S \equiv (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$,
$\mathcal{T}_\gamma$ = τοπολ-γινόμενο στο $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$. Τότε:

$\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \equiv (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_\gamma)$ όχι T_4.

Αποδ.

(1) $A = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ κλειστό ως προς την συνήθη τοπ-γινόμενο $\xRightarrow[\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_S]{}$ A κλειστό $\subseteq \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.

(2) $(A, \mathcal{T}_A$ = σχετ. από $\mathcal{T}_\gamma)$ = διακριτός.

Πράγματι:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \underset{\mathcal{T}_S}{\underset{\cap}{(x-1,x]}} \times \underset{\mathcal{T}_S}{\underset{\cap}{(-x-1,-x]}} \in \mathcal{T}_\gamma \Rightarrow$$

$$\underbrace{A \cap ((x-1,x] \times (-x-1,-x])}_{=\;;} \in \mathcal{T}_A$$

$(y,z) \in A \cap (\qquad) \Rightarrow (y,z) \in A \Rightarrow z = -y$ και

$(y,z) = (y,-y) \in (x-1,x] \times (-x-1,-x] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1 < y \leq x \\ -x-1 < -y \leq -x \Rightarrow x \leq y \end{array} \right\} \Rightarrow x = y. \text{ Δηλ:}$$

$$A \cap ((x-1,x] \times (-x-1,-x]) = \{(x,-x)\} \in \mathcal{T}_A.$$

(3) Από (2), κάθε $F \subseteq A$ είναι $\mathcal{T}_A$-κλειστό $\Rightarrow$
$\exists K$ $\mathcal{T}_\gamma$ κλειστό: $F = K \cap A$ = τομή $\mathcal{T}_\gamma$-κλειστών.
Άρα κάθε $F \subseteq A$ είναι $\mathcal{T}_\gamma$-κλειστό.

(4) Θέτουμε:

$F_1 := \{(x,-x) : x \in \mathbb{Q}\} \subseteq A$, κλειστό $\subseteq \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.

$F_2 := \{(x,-x) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \subseteq A$, κλειστό $\subseteq \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$

με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Θδο F_1, F_2 <u>δεν</u> διαχωρίζονται από ανοιχτά στον $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.

(5) Με άτοπο, έστω $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_\gamma$ με $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : (x,-x) \in F_2 \subseteq \underset{\mathcal{T}_\gamma}{\underset{\cap}{G_2}} \in \mathcal{N}_{(x,-x)} \\ \{(x - 1/n, x] : n \in \mathbb{N}\} \text{ β.π. του } x \text{ στην } \mathcal{T}_S \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, n_x \in \mathbb{N} : (x - 1/n_x, x] \times (-x - 1/n_x, -x] \subseteq G_2.$$

(6) $\forall n \in \mathbb{N}$ $A_n := \{x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : n = n_x\} \Rightarrow$

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow$$

$$\mathbb{R} = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \cup \mathbb{Q} = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\Big) \cup \Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}\Big), \quad (*)$$

όπου $\overline{A_n}$ θεωρούνται ως προς την $\mathcal{T}$, ομοίως και τα εσωτερικά που θα εμφανιστούν παρακάτω.

[Υπενθ: <u>Θεωρ. Baire</u>: X πλήρης μχ, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με $X = \bigcup F_n \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : F_{n_0}^{\circ} \neq \emptyset$.]

(7) Εφαρμόζοντας Θ. Baire στην (*) (για τον μ.χ. $(\mathbb{R}, \tau)$), έχουμε ότι $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \left(\overline{A_{n_0}}\right)^{\circ} \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, (a,b) \subseteq \overline{A_{n_0}}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Έστω $q \in (a,b) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow (q,-q) \in F_1 \subseteq \underset{\substack{\in \\ \tau_\gamma}}{G_1} \in \mathcal{N}_{(q,-q)}$

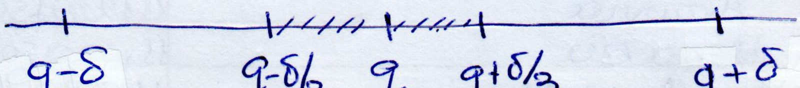
$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \; V := (q-\delta, q] \times (-q-\delta, -q] \subseteq G_1$.

Μικραίνω το δ, ώστε $0 < \delta < 1/n_0$. Τότε:

$q \in (a,b) \subseteq \overline{A_{n_0}}$ και $\delta/3 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (q - \delta/3, q + \delta/3) \cap A_{n_0} \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, t \in (q-\delta/3, q+\delta/3) \cap A_{n_0}$. Τότε



$t \leq q \Rightarrow t \in (q-\delta, q] \Rightarrow (t-\delta, t] \cap (q-\delta, q] \neq \emptyset$.

$t > q \Rightarrow q \in (t-\delta, t] \Rightarrow (t-\delta, t] \cap (q-\delta, q] \neq \emptyset$

Παρόμοια $(-t-\delta, -t] \cap (-q-\delta, -q] \neq \emptyset$

Παίρνω $x \in (t-\delta, t] \cap (q-\delta, q]$ και

$y \in (-t-\delta, -t] \cap (-q-\delta, -q] \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \in V = (q-\delta, q] \times (-q-\delta, -q]$ και

$(x,y) \in W := (t - 1/n_0, t] \times (-t - 1/n_0, -t] \in \mathcal{N}_{(t,-t)}$

Επειδή $t \in A_{n_0} \Rightarrow W \subseteq G_2$

όμως $V \subseteq G_1$

$(x,y) \in V \cap W$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, άτοπο.

Παρατηρήσεις

1. $\mathbb{R}_S$ T_4 , $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ όχι T_4. Άρα
$(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ T_4-χώροι $\not\Rightarrow$ $(X = \prod X_i, \tau_\gamma)$ T_4-χώρος.

2. $\mathbb{R}_S$ όχι μετρικοποιήσιμος:
Αν $\mathbb{R}_S$ μετρικοπ. $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ μετρικ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ T_4, άτοπο.

Άσκ

$\{f_a: X_a \to Y_a\}_{a\in A}$ οικογ. συνεχών απεικονίσεων.

Να εξετάσετε αν η απεικόνιση

$$f : \prod X_a \longrightarrow \prod Y_a : \quad f(x=(x_a)) = (f_a(x_a))$$

είναι συνεχής.

Απαντ. 1

Αρκεί νδο $\forall (x_\lambda) \subseteq \prod X_a$ με $x_\lambda \to x$, ισχύει $f(x_\lambda) \to f(x)$.

Έστω $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = ((x_\lambda^a)_{a\in A})_{\lambda\in\Lambda}$ με $x_\lambda \to x = (x_a)_{a\in A}$.

$$\Rightarrow x_\lambda^a \to x_a \quad \forall a\in A \overset{f_a}{\underset{\text{συν}}{\Longrightarrow}} \underbrace{f_a(x_\lambda^a)}_{Y_a \ni y_\lambda^a} \to \underbrace{f_a(x_a)}_{y_a\in Y_a} \quad \forall a\in A$$

$$\Rightarrow y_\lambda = f(x_\lambda) \longrightarrow y = f(x).$$

Απάντ. 2

Αρκεί νδο η f αντιστρέφει τα βασικά $\subseteq \prod Y_a$ σε ανοιχτά. Έστω $V := \bigcap_{1\le k\le n} \pi_{a_k}^{-1}(V_{a_k})$. Τότε

$$\underbrace{x}_{=(x_a)} \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(x)\in V \Leftrightarrow (f_a(x_a)) \in V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_{a_k}(x_{a_k}) \in V_{a_k} \quad \forall\, k=1,\dots,n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{a_k} \in \underbrace{f_{a_k}^{-1}(V_{a_k})}_{=U_{a_k}\in \mathcal{T}_{X_{a_k}}} \quad \forall\, k=1,\dots,n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{1\le k\le n} \pi_{a_k}^{-1}(U_{a_k}) = \text{βασικό της } \mathcal{T}_X.$$

Ασκ

Να εξετάσετε αν ισχύει η ισοδυναμία:

(X,τ_X), (Y,τ_Y) κμσ $\Longleftrightarrow$ $(X\times Y, \tau_\gamma = \text{τοπ-γιν.})$ κμσ.

(κμσ: κατά μονοπάτια συνεκτικός)

Απάντ.

$(\Rightarrow)$ Έστω X, Y κμσ., και έστω $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in X\times Y$.

Τότε:

$\exists$ συνεχής $f: [0,1] \to X$: $f(0)=x_1$, $f(1)=x_2$.

$\exists$ —"— $g: [0,1] \to Y$: $g(0)=y_1$, $g(1)=y_2$.

Θέτουμε

$h: [0,1] \to X\times Y$: $h(t) = (f(t), g(t))$.

Η h είναι συνεχής, γιατί $p_X \circ h = f$, $p_Y \circ h = g$ συνεχείς, και $h(0) = (x_1, y_1)$, $h(1) = (x_2, y_2)$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $x_1, x_2 \in X$. Διαλέγω $y_0 \in Y$ τυχαίο.

$\exists\ f: [0,1] \to X\times Y$ συνεχής: $f(0) = (x_1, y_0)$, $f(1) = (x_2, y_0)$.

Θέτω $g := p_X \circ f : [0,1] \to X$

Η g είναι συνεχής σαν σύνθεση συνεχών και

$g(0) = p_X(x_1, y_0) = x_1$, $g(1) = p_X(x_2, y_0) = x_2$.

Άσκ

$(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ τχ και $\mathcal{T}_\gamma$ η τοπολ.-γινόμενο στον $X\times Y$.
Εξετάστε αν ισχύουν οι ιδιότητες, $\forall A\subseteq X$, $B\subseteq Y$:

(1) $\overline{A\times B} = \overline{A}\times\overline{B}$

(2) $(A\times B)^\circ = A^\circ\times B^\circ$

και υπολογίστε το $\partial(A\times B)$.

Απαντ.

(1) $(x,y)\in\overline{A\times B} \iff \exists\,(x_\lambda,y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\subseteq A\times B:\ (x_\lambda,y_\lambda)\to(x,y)$

$\iff \exists\,(x_\lambda)\subseteq A,\ (y_\lambda)\subseteq B:\ x_\lambda\to x \wedge y_\lambda\to y$

$\iff x\in\overline{A} \wedge y\in\overline{B}$

(2) $(x,y)\in(A\times B)^\circ \iff \exists$ ανοιχτό βασικό $U\times V = p_X^{-1}(U)\cap p_Y^{-1}(V)$
με $(x,y)\in U\times V\subseteq A\times B$

$\iff \exists$ ανοιχτά $U\subseteq X$, $V\subseteq Y$:
$x\in U\subseteq A$, $y\in V\subseteq B$

$\iff x\in A^\circ \wedge y\in B^\circ$

$\partial(A\times B) = \overline{A\times B}\cap\overline{(A\times B)^c}$

$(A\times B)^c = \{(x,y)\in X\times Y \mid (x,y)\notin A\times B\} =$

$= \{(x,y)\in X\times Y \mid x\notin A \vee y\notin B\} = (A^c\times Y)\cup(X\times B^c) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{(A\times B)^c} = \overline{A^c\times Y}\cup\overline{X\times B^c} = (\overline{A^c}\times Y)\cup(X\times\overline{B^c})$

Άρα:

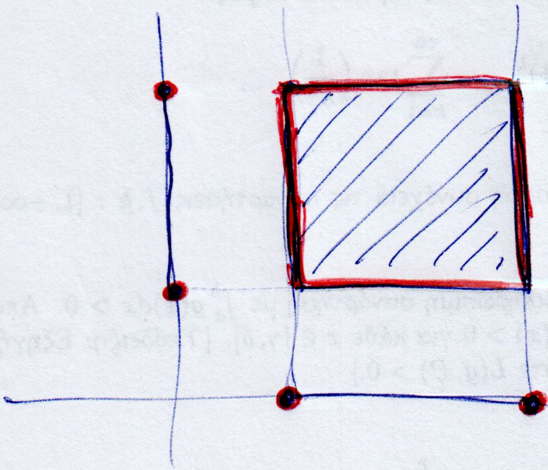
$$\partial(A\times B)=\overline{A\times B}\cap\overline{(A\times B)^c}=$$

$$=(\bar{A}\times\bar{B})\cap[(\overline{A^c}\times Y)\cup(X\times\overline{B^c})]=$$

$$=[(\bar{A}\times\bar{B})\cap(\overline{A^c}\times Y)]\cup[(\bar{A}\times\bar{B})\cap(X\times\overline{B^c})]=$$

$$=[(\bar{A}\cap\overline{A^c})\times(\bar{B}\cap Y)]\cup[(\bar{A}\cap X)\times(\bar{B}\cap\overline{B^c})]=$$

$$=(\partial A\times\bar{B})\cup(\bar{A}\times\partial B)$$



Ασκ

$(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ οικογ. τ.χ. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{B}_b = \left\{ \prod_{i\in I} U_i \mid U_i \in \tau_i \right\}$$

(1) Νδο $\mathcal{B}_b$ είναι βάση μιας τοπολογίας τ_b του $X = \prod X_i$.

(2) Συγκρίνετε τ_b με τ_γ.

(3) Εξετάστε την συνέχεια των προβολών $p_i : X \to X_i$.

(4) Έστω (Y, τ_Y) τχ. και $f : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X = \prod X_i, \tau_b)$.

Να εξετάσετε αν ισχύει η ισοδυναμία

$$f \text{ συνεχής} \iff p_i \circ f \text{ συνεχής } \forall i \in I.$$

Απαντ.

(1) Η $\mathcal{B}_b$ είναι βάση:

(1α) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}_b} B = X$, διότι $X = \prod X_i \in \mathcal{B}_b$.

(1β) Έστω $\prod U_i, \prod V_i \in \mathcal{B}_b$, και $x = (x_i) \in (\prod U_i) \cap (\prod V_i)$

$\Rightarrow x_i \in U_i \cap V_i \in \tau_i, \ \forall i \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow x = (x_i) \in \prod (U_i \cap V_i) \subseteq (\prod U_i) \cap (\prod V_i)$.

(2) Έστω $\mathcal{B}$ η κανον. βάση της τ_γ.

$$B \in \mathcal{B} \Rightarrow B = \bigcap_{1\le k\le n} p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) = \prod U_i \mid U_i = \begin{cases} X_i, & i \neq i_k \\ U_{i_k}, & i = i_k \end{cases}$$

$\cap$
τ_i

$\Rightarrow B \in \mathcal{B}_b$

Άρα $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_b$ και $\tau_\gamma \subseteq \tau_b$.

(3) Η $\mathcal{T}_\gamma$ είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει συνεχείς τις p_i. Αφού $\mathcal{T}_b \supseteq \mathcal{T}_\gamma$, οι p_i είναι $\mathcal{T}_b$-συνεχείς.

(4) $Y \xrightarrow{f} (X, \mathcal{T}_b) \xrightarrow{p_i} X_i$

($\Rightarrow$) f $\mathcal{T}_b$-συν και p_i $\mathcal{T}_b$-συν $\Rightarrow$ $p_i \circ f$ συνεχής.

($\Leftarrow$) Εστω $X_n = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{|\cdot|}$ = συνήθης, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow (X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_b)$

Εστω και $(Y, \mathcal{T}_Y) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|})$, και

$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{|\cdot|}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_b) : f(t) = (t, t, t, t, \dots)$

$\Rightarrow p_n \circ f(t) = t = id_{\mathbb{R}}(t)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, συνεχής.

Ομως η f δεν είναι συνεχής:

$B = \prod_{n \in \mathbb{N}} (-1/n, 1/n) \in \mathcal{T}_b$ αλλά

$f^{-1}(B) = \{ t \in \mathbb{R} \mid f(t) \in B \} =$

$= \{ t \in \mathbb{R} \mid t \in (-1/n, 1/n), \forall n \in \mathbb{N} \} = \{0\}$