

*

Xek 1 (Προσεσον)

Eivai 160δινακα:

μαγική επιταχία

- (1) (X, Σ) T_2 -χώρας
- (2) $\forall x, y \in X$ με $x \neq y$: $\exists V \in N_x: y \notin \bar{V}$.
- (3) $\bigcap \bar{U} = \{x\}$.

$\cup N_x$

Άνοιξ.

(1 \Rightarrow 2) X T_2 , $x \neq y \Rightarrow \exists G, H \in \Sigma: x \in G, y \in H, G \cap H = \emptyset$

Θέτω $V = G \in N_x$.

Αν $y \in \bar{V} \Rightarrow \forall W \in N_y: W \cap V = W \cap G \neq \emptyset$
μα $W = H$ έχω ξωτικό.

(2 \Rightarrow 3) $\{x\} \subseteq \bigcap_{U \in N_x} \bar{U}$, γιατί $\{x\} \subseteq U \subseteq \bar{U} = \forall U \in N_x$.

Αριθμοφόρδ:

$y \in \bigcap \bar{U}$ και $y \neq x \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$ ξωτικό.
 $\cup N_x$

(3 \Rightarrow 1) $x \neq y$ σε $X \rightarrow y \notin \bigcap \bar{U} \Rightarrow \exists U_0 \in N_x: y \notin \bar{U}_0$

$\Rightarrow \exists G = U_0^\circ, H = (\bar{U}_0)^c = X \setminus \bar{U}_0 \in \Sigma :$

$x \in G, y \in H$ και $G \cap H = U_0^\circ \cap (X \setminus \bar{U}_0) \subseteq$
 $\subseteq \bar{U}_0 \cap (X \setminus \bar{U}_0) = \emptyset$.

ΚΕΦ 5-6
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκ 1 $(X, \Sigma) T_1$, $\Upsilon = \text{πεπρ} \subseteq X \Rightarrow (\Upsilon, \Sigma_{\Upsilon} = \sigma_{X(\Upsilon)})$ διακρίσις.

Άσκ 2 $\Upsilon \subseteq X = T_1 \Rightarrow \Upsilon = T_1$.

$\Upsilon = T_1 \Leftrightarrow \text{μονογένεσια} = \text{αξιοά}$

$\Upsilon = \text{πεπρ} \Rightarrow$

\Rightarrow η ίδια υπόσ. στην Υ γίνεται περιτό' \Rightarrow

\Rightarrow — — — Υ — ανοχή $\Rightarrow \Upsilon$ διακρίσις.

Άσκ 2 $X = T_2$, x_1, \dots, x_n διακρ. ευθία $\in X \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists V_1, V_2, \dots, V_n$ ανοχή, ξέρα ανα δια: $x_i \in V_i$.

Άσκ 3 $X = T_2 \Rightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \exists V_{ij}, V_{ji}$ ανοχή ξέρα:

$x_i \in V_{ij}, x_j \in V_{ji}, V_{ij} \cap V_{ji} = \emptyset$.

ηαρά: $x_i \in V_{ij} \quad \forall j=1, \dots, n \Rightarrow x_i \in V_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n} V_{ij}$

Ιδηπ: $V_i \cap V_j = \emptyset$, στη $i \neq j$:

$V_i \subseteq V_{ij}$ και $V_j \subseteq V_{ji} \Rightarrow V_i \cap V_j \subseteq V_{ij} \cap V_{ji} = \emptyset$.

Παράδειγμα ιδιαίτερης: $X = T_4$ και F_1, \dots, F_n ξέρα μετά \Rightarrow οι δύο

$\Rightarrow \exists V_1, \dots, V_n$ ανοχή, στη δια ξέρα: $F_i \subseteq V_i$.

ΑΓΚ. 3

- (X, Σ_X) ρ.χ., (Y, Σ_Y) T_2 -κίνος, $f, g: X \rightarrow Y$ ευεξις,
 $F = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. Τότε:
- (1) F κλειστό
 - (2) F πυκνό $\subseteq X \Rightarrow f = g$.

Άνοδ.

- (1a) Θέσο $X \setminus F$ ανοιχτό: $x \in X \setminus F \Rightarrow f(x) \neq g(x) \in Y - T_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists V_1, V_2 \in \Sigma_Y : f(x) \in V_1, g(x) \in V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \in f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) = W \in \Sigma_X$.
- Ιεχυπ: $W \subseteq X \setminus F: y \in W \Rightarrow f(y) \in V_1 \wedge g(y) \in V_2 \Rightarrow$
 $V_1 \cap V_2 = \emptyset \Rightarrow f(y) \neq g(y) \Rightarrow y \in X \setminus F$.

Αφοι $x \in W \subseteq X \setminus F \Rightarrow X \setminus F$ ανοιχτό $\Rightarrow F$ κλειστό.

 Σ_X

- (1β) Εγτώ (x_2) στο F με $x_2 \rightarrow x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x_2) \rightarrow f(x) \\ g(x_2) \rightarrow g(x) \end{array} \right\} \stackrel{Y}{\rightarrow} T_2$
 $f(x) = g(x) \Rightarrow x \in F$, και F κλειστό

(1γ) $Y - T_2 \Leftrightarrow \Delta_Y$ κλειστό $\subseteq Y \times Y$. Θέτω:

$\phi: X \rightarrow Y \times Y: \phi(x) = (f(x), g(x))$. Τότε ϕ ευεξις,
αφοι $p_1 \circ \phi = f$ και $p_2 \circ \phi = g$ ευεξις. Άσα

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(\Delta_Y) &= \text{κλειστό} \\ &\subseteq \{x \in X \mid \phi(x) \in \Delta_Y\} = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = F. \end{aligned}$$

- (2) F κλειστό $\Rightarrow \bar{F} = F$
 F πυκνό $\Rightarrow \bar{F} = X \Rightarrow F = X$ και $f = g$.

A6K. 4

$(X, \Sigma) T_4 \iff \forall G_1, G_2 \in \Sigma \text{ με } G_1 \cup G_2 = X$

$\exists F_1, F_2 \text{ κλειστά: } F_1 \subseteq G_1, F_2 \subseteq G_2, F_1 \cup F_2 = X.$

Ano8

$(\Rightarrow) \text{ Εάν } (X, \Sigma) T_4 \text{ και } G_1, G_2 \in \Sigma \text{ με } G_1 \cup G_2 = X \Rightarrow$

$\Rightarrow G_1^c, G_2^c \text{ κλειστά με } G_1^c \cap G_2^c \stackrel{\text{def}}{=} (G_1 \cup G_2)^c = X^c = \emptyset \Rightarrow$

$\xrightarrow[T_4]{X} \exists U_1, U_2 \in \Sigma : G_1^c \subseteq U_1, G_2^c \subseteq U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$

$\Rightarrow F_1 := U_1^c, F_2 := U_2^c \text{ κλειστά, με}$

$F_1 = U_1^c \subseteq G_1, F_2 = U_2^c \subseteq G_2 \text{ και}$

$F_1 \cup F_2 = U_1^c \cup U_2^c \stackrel{\text{def}}{=} (U_1 \cap U_2)^c = \emptyset^c = X.$

$(\Leftarrow) \text{ Να προφέρουμε: Θέση } (X, \Sigma) T_4. \text{ Θεωρούμε ωχαλά}$

$F_1, F_2 \text{ κλειστά με } F_1 \cap F_2 = \emptyset \Rightarrow F_1^c, F_2^c \in \Sigma \text{ με}$

$F_1^c \cup F_2^c = (F_1 \cap F_2)^c = \emptyset^c = X \xrightarrow{\text{υπόθ.}}$

$\Rightarrow \exists \text{ κλειστά } K_1 \subseteq F_1^c, K_2 \subseteq F_2^c : K_1 \cup K_2 = X$

$\Rightarrow \exists \text{ συριχτά } K_1^c \supseteq F_1, K_2^c \supseteq F_2 :$

$K_1^c \cap K_2^c = (K_1 \cup K_2)^c = X^c = \emptyset.$

(4)

Α6Κ 5

$(X, \Sigma_X) T_4$, $(Y, \Sigma_Y) 2X$, $f: X \rightarrow Y$ ενεχις, κλειστη και ενι $\Rightarrow (Y, \Sigma_Y) T_4$.

Συνολο: $F_1, F_2 \subseteq Y$ ηγειρτα, ξερα \Rightarrow
 $\Rightarrow f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2) \subseteq X$ ηγειρτα, ξερα και $X T_4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists U_1, U_2$ ανοντα: $f^{-1}(F_1) \subseteq U_1, f^{-1}(F_2) \subseteq U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$
 $\Rightarrow f(f^{-1}(F_1)) \subseteq f(U_1), f(f^{-1}(F_2)) \subseteq f(U_2) \Rightarrow ;;$
 $\overset{f(U_1)}{\therefore} \overset{f(F_1)}{\therefore} \quad \text{ανοντα} \quad \overset{f(U_2)}{\therefore} \overset{f(F_2)}{\therefore} \quad ;;$
 $f(U_1) \cap f(U_2); \quad \square$

Άνοδος

$G_1, G_2 \in \Sigma_Y : G_1 \cup G_2 = Y \Rightarrow$

$f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2) \in \Sigma_X : f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2) = X - T_4 \xrightarrow{\text{προηγ.}} \text{Α6Κ.}$

\exists ηγειρτα $F_1 \subseteq f^{-1}(G_1), F_2 \subseteq f^{-1}(G_2) : F_1 \cup F_2 = X \Rightarrow$

$\exists f(F_1), f(F_2)$ ηγειρτα $\forall \epsilon$

$f(F_1) \subseteq f(f^{-1}(G_1)) = G_1, f(F_2) \subseteq f(f^{-1}(G_2)) = G_2,$

$f(F_1) \cup f(F_2) = Y. \quad (\text{f ενι}) \xrightarrow{\text{προηγ.}} \text{Α6Κ.}$

$(Y, \Sigma_Y) T_4.$

Άσκ 6

(χρ) Στ., $\Sigma^* = \{A \in \Sigma : A \neq \emptyset\}$. Τότε:

\times σταχωρίσιμος $\Leftrightarrow \exists (\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} : \Sigma_n \subseteq \Sigma^*$:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n = \Sigma^*, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \bigcap_{A \in \Sigma_n} A \neq \emptyset.$$

Άποδ

(\Rightarrow) Εφών \times σταχωρ & $D \subseteq X$ λειθή, πυκνό.

$$\subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ορίων $\Sigma_n := \{A \in \Sigma^* : x_n \in A\} \Rightarrow \bigcup \Sigma_n = \Sigma^*$.

Πράγματι: $\bigcup \Sigma_n \subseteq \Sigma^*$ προφανώς.

$$A \in \Sigma^* \rightarrow A \cap D \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_n \in A \cap D \Rightarrow A \in \Sigma_n.$$

Επίσης $\bigcap A \neq \emptyset$ σίδια $x_n \in \bigcap A$.

$$A \in \Sigma_n$$

$$A \in \Sigma_n$$

(\Leftarrow) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \bigcap A \neq \emptyset$, ενηγίω $x_n \in \bigcap A$.

$$A \in \Sigma_n$$

$$A \in \Sigma_n$$

Ορίων $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \text{λειθή}$.

Εφών $A \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma^* = \bigcup \Sigma_n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : A \in \Sigma_{n_0}$

$\neq \emptyset$

$$\Rightarrow x_{n_0} \in A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cap D \neq \emptyset,$$

Συν. D πυκνό.

A6K. F

$(x_i, \gamma_i)_{i \in I} \in X$, $\mathcal{F} = \{f_i : Y \rightarrow X_i\}$ οικογ. απευκρισεων του διαχωριζον τα σημεια του Y (\Leftrightarrow δηλ. $\forall y_1 \neq y_2 \in Y \exists i_0 \in I : f_{i_0}(y_1) \neq f_{i_0}(y_2) \in X_{i_0}$). Θέτουμε

$$\phi : Y \rightarrow \prod X_i : \phi(y) = (f_i(y))$$

Αν Σ_Y η αρχική ταυτολογία σεν Y από την \mathcal{F} , τότε $\phi : Y \rightarrow \phi(Y)$ οικοιοκυρρεψής (ϕ τοπολ. εμφύτευση).

Άνοδ

$$\forall y \neq z \in Y \exists f_{i_0}(y) \neq f_{i_0}(z) \Rightarrow \phi(y) \neq \phi(z), \text{ δηλ. } \phi \text{ 1-1.}$$

$$\text{ΓΥΠΕΝΘ: } (x_\lambda) \subseteq \prod X_i \Rightarrow x_\lambda = (x_\lambda^i)_{i \in I} \text{ και}$$

$$x_\lambda \rightarrow x = (x_i) \Leftrightarrow x_\lambda^i \rightarrow x_i \quad \forall i \in I$$

$\Rightarrow (1)$
 $\Leftarrow (2)$

$$\phi \text{ ενεχίς: } \text{Έστω } (y_\lambda) \subseteq Y \text{ με } y_\lambda \rightarrow y \xrightarrow{\text{εν.}} \downarrow$$

$$\Rightarrow f_i(y_\lambda) \rightarrow f_i(y) \quad \forall i \xrightarrow{(2)} (f_i(y_\lambda)) \rightarrow (f_i(y)) \in \prod X_i$$

\uparrow
 $\phi(y_\lambda) \rightarrow \phi(y)$.

$$\phi^{-1} \text{ ενεχίς: } \text{Έστω } \phi(y_\lambda) \rightarrow \phi(y) \in \phi(Y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f_i(y_\lambda)) \rightarrow (f_i(y)) \in \prod X_i \xrightarrow{(1)}$$

$$\Rightarrow f_i(y_\lambda) \rightarrow f_i(y) \quad \forall i \in I \xrightarrow{(Σ_Y \text{ αρχική από } f_i)}$$

$$\Rightarrow y_\lambda \rightarrow y.$$

ΑΓΚ. 8

(X, Σ) ξε, με $\Sigma = \text{αρχική ανό } \mathcal{F} = \{f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$
και \mathcal{F} διαχωρίζει τα σημεία του $X \Rightarrow (X, \Sigma)$ μετριοποιησίμος.

Άριστος

Ανο των προηγ. ΑΓΚ. (X, Σ) αρχικοποδικός με
 $(\phi(X), \Sigma_{\text{αρχ.}})$ ανό $\phi(X) \subseteq \mathbb{R}^N = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n$, $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}$,
και \mathbb{R}^N μετριοποιησίμος, γαν αριθμ. γράμμενο
μετρικών ακέρων \Rightarrow υπόχωρος $\phi(X)$ μετριοποιήσιμος.

(a) προβλήματα στη συγκέντρωση

Μετριοποδικός με την αρχική μετρητή $\rho(\theta^* x) > 0$

μετριοποδικός με την αρχική μετρητή $\rho(x) > 0$ και κάποιο $\theta \in \mathbb{R}^N$ π.χ. $\theta = (1, 0, 0, \dots, 0)$ παρατητικός $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ οποιούδεν ουσίας $\theta(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$

$\theta(x) = \theta(\mu x)$, κατ' άλλο $\theta(x) = x$

π.χ. (3 hours) προτίμως μετρητή μετρητής από $\mathbb{R} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{N-1} (\Delta x - \Delta x_k) \sum_{m=1}^{N-k} m \theta\left(\frac{x_m}{m}\right)$$

(b) επίπεδη αναλύση μετρητής κατά την οποία το μετρητής στοιχείο

$$\sum_{k=1}^{N-1} \Delta x_k p_k = \text{const} \quad \sum_{k=1}^{N-1} \Delta x_k p_k^2$$

επίπεδης $\sum_{k=1}^{N-1} \Delta x_k$ και $\sum_{k=1}^{N-1} p_k^2$ μετρητής προσδιορίζεται από την οποία το μετρητής

$\theta = (1, 2, 3, \dots, N)$, (a) προτίμως p_k^2 μετρητής από \mathbb{R}^N παρατητικής μετρητής

p_k^2 πελλαρόνα κατά $p_k^2 > 0$ [παρατητικής μετρητής παλλαρόνα κατά $p_k^2 < 0$ μετρητής]

παλλαρόνα $p_k^2 < 0$ παρατητικής μετρητής παλλαρόνα κατά $p_k^2 < 0$ και παλλαρόνα παρατητικής μετρητής

$\theta = (1, 2, 3, \dots, N)$, προτίμως p_k^2 μετρητής από \mathbb{R}^N παρατητικής μετρητής

ΑΓΚ 9

8

$(X_i, \Sigma_i)_{i \in I}$ ζε, ($X = \prod X_i$, $\Sigma_X = \Sigma_{\prod} - \text{pr.}$)

Σταθεροποιούμε $j \in I$, $Z = (Z_i) \in X$, ταυ θέτουμε

$g: X_j \rightarrow X: g(x) = (x_i) \mid x_i = \begin{cases} Z_i, & i \neq j \\ x, & i = j. \end{cases}$

Τότε (X_j, Σ_j) και $(g(X_j), \Sigma_{g(X)} = \Sigma_{\prod} - \text{pr}_j)$ είναι σημιότικορά δο.

Άνοδ. g 1-1: $x \neq y \in X_j \Rightarrow g(x) \neq g(y)$ (διαφέρων στην j -συντεταγμένη).

g ευρεξής: $(X_j, \Sigma_j) \rightarrow (\prod X_i, \Sigma_X)$ \Leftrightarrow

$p_i \circ g: (X_j, \Sigma_j) \rightarrow (X_i, \Sigma_i)$ ευρεξής, $\forall i \in I$. Όπου:

$\forall x \in X_j: p_i \circ g(x) = x_i = \begin{cases} Z_i, & i \neq j \\ x, & i = j \end{cases} \Rightarrow$

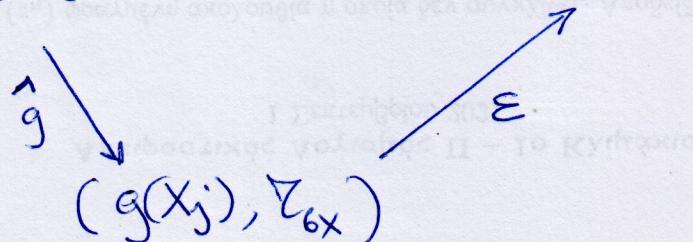
$\Rightarrow p_i \circ g = \begin{cases} \text{σταθ= } Z_i, & i \neq j \\ \text{ταυτ. id}_{X_j}, & i = j \end{cases} \begin{cases} \text{ευρεξής, } & \forall i \in I. \end{cases}$

Γνωρίζουμε ότι

$\hat{g}: (X_j, \Sigma_j) \xrightarrow{\prod} (g(X_j), \Sigma_{g(X)})$ ευρεξής \Leftrightarrow

$\varepsilon \circ \hat{g} = g: (X_j, \Sigma_j) \rightarrow (X, \Sigma_X)$ ευρεξής, όπου ε η καν. επεφύτευση. Άρα \hat{g} 1-1, επι, ευρεξής.

$(X_j, \Sigma_j) \xrightarrow{g} (X = \prod X_i, \Sigma_X)$



(9)

kai $\hat{g}^{-1} : g(x_j) \rightarrow x_j$ eisai eurexis:

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ g(x) \\ \parallel \\ (x_i) = (x_j z_i)_{i \neq j} \xrightarrow{\hat{g}^{-1}} x = j\text{-eurez. tou } g(x). \end{array}$$

Emv $\hat{g}^{-1} = p_j |_{g(x_j)} =$ eurexis kan περιορισμός eurexos se unioxepto.

$$\left(\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \right) \text{ and } \left(\begin{array}{c} \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \right)$$

an $x \in (x+1) \cap \text{II}$ eisai eurexis se megánoi tis eurexis $x \in (x+1) \cap \text{III}$. $\hat{g}(x) = (x) \cup \text{lex}^-(x, u) \cup (x, 1)$

an $x \in (x+1) \cap \text{III}$ eisai eurexis se megánoi tis eurexis $x \in (x+1) \cap \text{IV}$. $\hat{g}(x) = (x) \cup \text{lex}^+(x, u) \cup (x, 1)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{u \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{(1+x)^2(1-u)} \right|$$

επειδή $(1+x)^2 \geq 1$ (ειδης)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{u \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{(1+x)^2(1-u)} \right|$$

an $(1+x)^2 = (x)$, πάντα (ειδης) μερικών διαίρεσης. Το σύγχρονο $(\infty+0] \leftarrow (\infty+0]$ είναι απλό (4)

$$\infty + \max_{u \in \mathbb{R}}$$

an $[0, 1] \ni u$ τοποθετείται στην γραμμή $u = (x)$ και στην γραμμή $0 < u < (x)$

πάντα μέσω