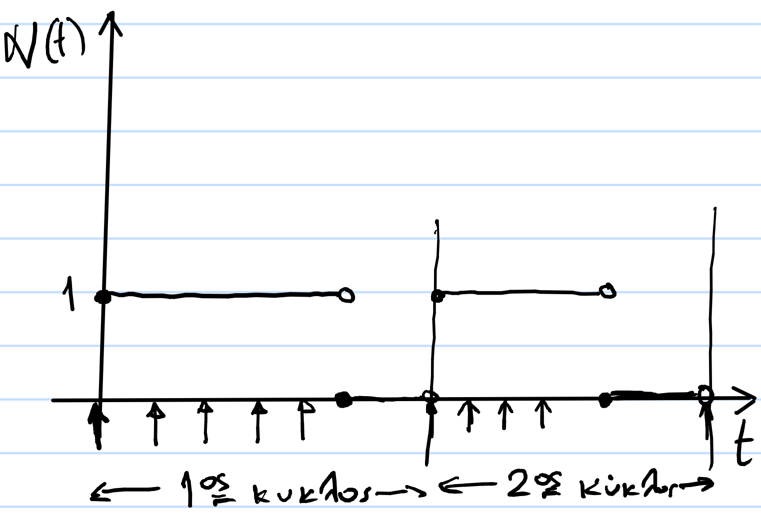
Αντώνης Οικονόμου

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_A(x)$ και το οποίο έχει έναν υπάλληλο. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο ελεύθερο αρχίζει να εξυπηρετείται και ο χρόνος εξυπηρέτησής του είναι $\mathrm{Exp}(\mu)$. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο απασχολημένο αναχωρεί άμεσα από το σύστημα και χάνεται για πάντα. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό των χαμένων πελατών.

Λύση:



$$\text{Μακροπροθ. ποσοστό χαμένων πελατών} = \lim_{t\to\infty} \frac{\#\text{ χαμένων στο } (0,t]/t}{\#\text{ αφίξεων στο } (0,t]/t}$$

$$= \frac{\text{Μακροπρ. ρυθμός χαμ. πελ.}}{\text{Μακροπρ. ρυθμός αφίξεων}}$$

$$\text{Μακροπροθ. ρυθμός χαμένων πελ.} = \frac{E\left[\begin{matrix}\#\text{ χαμενων πελ}\\ \text{σε 1 κύκλο}\end{matrix}\right]}{E[\text{Διάρκεια κύκλου}]}$$

$$\text{Μακροπροθ. ρυθμός αφίξεων} = \frac{E[\#\text{ αφιξ. σε 1 κύκλο}]}{E[\text{Διάρκεια κύκλου}]}$$

$$\Rightarrow \text{Μακροπροθ. ποσοστό χαμένων πελατών} = \frac{E[\#\text{ χαμ. πελ. σε 1 κύκλο}]}{E[\#\text{ αφιξ. σε 1 κύκλο}]} = \frac{E[\text{χαμ. πελ. σε 1 κ}]}{1 + E[\text{χαμ. πελ. σε 1κ}]}$$

E[# χαμ. πελ. σε 1 κύκλο] = E[# αφίξεων συμφ. με αναν. διαδικ. με ενδιαμ. χρ $F_A(x)$ σε χρον. διάστημα $Exp(\mu)$]

$$= \int_0^\infty m_A(t)\cdot \mu e^{-\mu t}\,dt = \underbrace{\Big[-m_A(t)e^{-\mu t}\Big]_{t=0}^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-\mu t}\,dm_A(t)}_{\tilde{m}_A(\mu)}$$

Άρα

Μακροπρ. ποσοστό χαμένων πελ

$$= \frac{\tilde{m}_A(\mu)}{1+\tilde{m}_A(\mu)} = \frac{\frac{\tilde{F}_A(\mu)}{1-\tilde{F}_A(\mu)}}{1+\frac{\tilde{F}_A(\mu)}{1-\tilde{F}_A(\mu)}} = \frac{\frac{\tilde{F}_A(\mu)}{\cancel{1-\tilde{F}_A(\mu)}}}{\frac{1-\tilde{F}_A(\mu)+\tilde{F}_A(\mu)}{\cancel{1-\tilde{F}_A(\mu)}}}$$

$$= \tilde{F}_A(\mu).$$