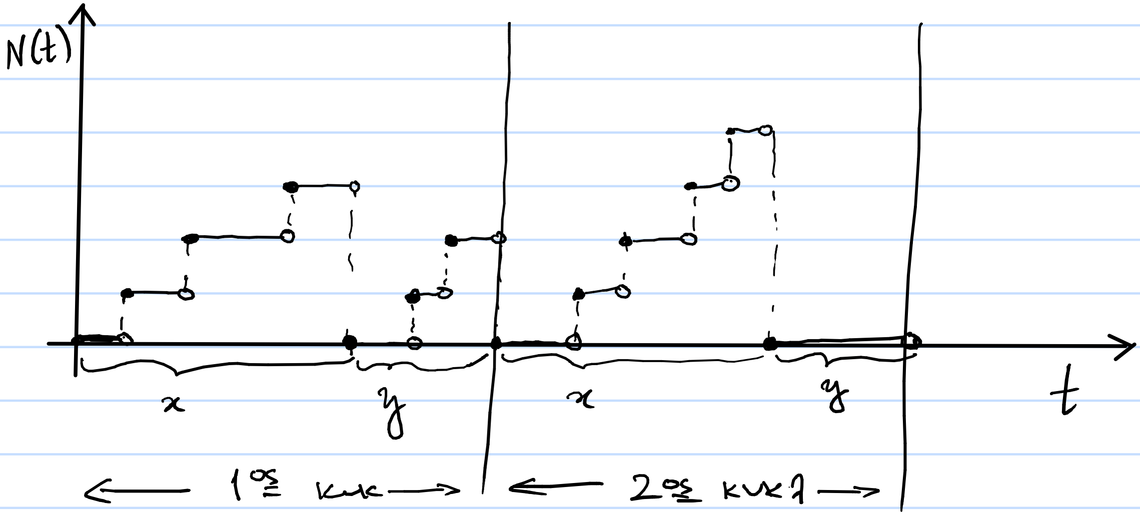
Αντώνης Οικονόμου

Σε μια στάση λεωφορείων φθάνουν επιβάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Η εταιρεία που εξυπηρετεί τη συγκεκριμένη στάση έχει δυο τύπους λεωφορείων, απλά και φυσούνες, που περνούν εναλλάξ από τη στάση. Ο χρόνος από την αναχώρηση απλού λεωφορείου μέχρι την άφιξη φυσούνας είναι x χρονικές μονάδες, ενώ ο χρόνος από την αναχώρηση φυσούνας μέχρι την άφιξη απλού λεωφορείου είναι y χρονικές μονάδες. Το κόστος ανά επίσκεψη στη στάση απλού λεωφορείου είναι K_1 και το κόστος ανά επίσκεψη φυσούνας είναι K_2. Το κόστος αναμονής ενός πελάτη ανά χρονική μονάδα είναι h. Να βρεθεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους και να βρεθούν οι τιμές των x και y που τον ελαχιστοποιούν.

Λύση:



$$\text{Μακροπρ. μέσος ρυθμός κόστους} \underset{\text{ΣΑΘΚ}}{=} \frac{E[\text{κόστος σε 1 κύκλο}]}{E[\text{διαρκ. κύκλου}]} = \frac{E[C_x] + E[C_y]}{x+y}$$

Αντώνης Οικονόμου

$$E[C_x] = E\left[K_1 + h \sum_{i=1}^{N(x)} (x - S_i)\right] = K_1 + h\, E\left[\sum_{i=1}^{N(x)} (x - S_i)\right]$$

χρόνος αφίξης του i-οστου πελ

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(x)} (x - S_i)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} Pr[N(x)=k]\, E\left[\sum_{i=1}^{\cancel{N(x)}\,k} (x - S_i) \,\middle|\, N(x)=k\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Pr[N(x)=k] \left(\sum_{i=1}^{k} x - \sum_{i=1}^{k} \underbrace{E[S_i \mid N(x)=k]}_{\frac{i \cdot x}{k+1}} \right)$$

(από Θ. Campbell)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Pr[N(x)=k] \left(\underbrace{kx - \frac{x}{\cancel{k+1}} \cdot \frac{k(\cancel{k+1})}{2}}_{\frac{kx}{2}} \right) = \frac{x}{2} \underbrace{E[N(x)]}_{\lambda x} = \frac{\lambda x^2}{2}$$

Αντώνης Οικονόμου

Μακροπρ. μέσος ρυθμός κόστους $\overset{ΣΑΘΚ}{=} \dfrac{K_1 + h\cdot\frac{\lambda x^2}{2} + K_2 + h\frac{\lambda y^2}{2}}{x+y}$

$$= \frac{K_1+K_2}{x+y} + \frac{h\lambda}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{x+y} = c(x,y)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \Longleftrightarrow -\frac{K_1+K_2}{(x+y)^2} + \frac{h\lambda}{2}\cdot\frac{2x(x+y)-(x^2+y^2)}{(x+y)^2}$$

$$= -\frac{K_1+K_2}{(x+y)^2} + \frac{h\lambda}{2}\cdot\frac{\cancel{2}x^2+2xy-\cancel{x^2}-y^2}{(x+y)^2}$$

$$= -\frac{K_1+K_2}{(x+y)^2} + \frac{h\lambda}{2}\left(1-\frac{2y^2}{(x+y)^2}\right) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \dfrac{h\lambda}{2} = \dfrac{h\lambda y^2 + K_1+K_2}{(x+y)^2} \\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \dfrac{h\lambda}{2} = \dfrac{h\lambda x^2 + K_1+K_2}{(x+y)^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 = y^2 \Longrightarrow x = y$$

Άρα $\dfrac{h\lambda x^2 + K_1 + K_2}{4x^2} = \dfrac{h\lambda}{2} \iff \dfrac{h\lambda}{4} + \dfrac{K_1+K_2}{4x^2} = \dfrac{h\lambda}{2}$

$$\iff \frac{K_1+K_2}{\cancel{4}x^2} = \frac{h\lambda}{\cancel{4}} \iff x = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{h\lambda}}.$$

$$x^* = y^* = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{h\lambda}}.$$