Άσκηση 1λ - Επιχ Έρευνα Στοχ Μοντ

Ένας φοιτητής έχει n βιβλία, αριθμημένα ως $1, 2, \ldots, n$. Το βιβλίο k έχει ακριβώς i τυπογραφικά λάθη με πιθανότητα $k^i/(k+1)^{i+1}$, όπου $i = 0, 1, 2, \ldots$ και $k = 1, 2, \ldots, n$. Ο φοιτητής διαλέγει ένα βιβλίο στην τύχη (ομοιόμορφα) και το διαβάζει. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των τυπογραφικών λαθών που θα βρει.

$I = \#$ τυπογρ. λαθών, $K =$ βιβλίο που επιλέγεται

$E[I] = ;$ $\quad Var[I] = ;$

$$E[I] = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{Pr[K=k]}_{= 1/n} \underbrace{E[I \mid K=k]}_{= \sum_{i=0}^{\infty} i \, Pr[I=i \mid K=k]}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \, Pr[I=i \mid K=k] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{k^i}{(k+1)^{i+1}} = k$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y^i = \frac{1}{1-y} \xRightarrow{d/dy} \underline{\sum_{i=0}^{\infty} i \, y^{i-1}} = \frac{1}{(1-y)^2} \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \frac{k^i}{(k+1)^{i+1}} = \frac{k}{(k+1)^2} \underline{\sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{k}{k+1}\right)^{i-1}} = \frac{k}{\cancel{(k+1)^2}} \frac{1}{\cancel{\left(1-\frac{k}{k+1}\right)^2}} = k$$

$$E[I] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot k = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

$$Var[I] = E[I^2] - (E[I])^2$$

$$E[I^2] = \sum_{k=1}^{n} Pr[K=k] \, E[I^2 \mid K=k]$$

$$E[I^2 \mid K=k] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \, Pr[I=i \mid K=k] = \sum^{\infty} \cdot i^2 \; k^i$$

$$\sum_{i=0} i \cdot \frac{}{(k+1)^{i+1}}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y^i = \frac{1}{1-y} \xRightarrow{d^2/dy^2} \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)y^{i-2} = \frac{2}{(1-y)^3}$$

$$\xRightarrow{\cdot y^2} \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\, y^i = \frac{2y^2}{(1-y)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\frac{k^i}{(k+1)^i} = \frac{2\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^2}{\left(1-\frac{k}{k+1}\right)^3} = \frac{\frac{2k^2}{\cancel{(k+1)^2}}}{\frac{1}{(k+1)^{\cancel{3}}}} = 2k^2(k+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\frac{k^i}{(k+1)^{i+1}} = 2k^2$$

Άρα

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{k^i}{(k+1)^{i+1}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\frac{k^i}{(k+1)^{i+1}}}_{2k^2} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i\,\frac{k^i}{(k+1)^{i+1}}}_{k}$$

$$E[I^2] = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\Pr[K=k]}_{1/n}\, \underbrace{E[I^2 \mid K=k]}_{2k^2+k}$$

$$= \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}}\left(\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}\,3} + \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n+1}{3} + \frac{n+1}{2}\right) = (n+1)\cdot\frac{4n+2+3n+3}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(7n+5)}{6}.$$

$$Var[I] = E[I^2] - (E[I])^2$$

$$= \frac{(n+1)(7n+5)}{\;} - \frac{(n+1)^2}{\;}$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(\overset{6}{\frac{7n+5}{3}} - \overset{4}{\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2} \cdot \frac{14n+10-3n-3}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(11n+7)}{12}.$$