6/6/19

Μάθημα 23

Σ.μ.ε.ε.

Ασκήσεις
Τελικές οδηγίες

① Τύπος εξέτασης

1 Θέμα: Διαδικασία Poisson (Βασικοί υπολογισμοί / Μοντελοποίηση) campbell / υπέρθεση / διάσπαση κλπ

1 Θέμα(+) συνήθως παραπάνω από ένα θέμα: Ανανεωτική Θεωρία: α) Ανανεωτικός Συλλογισμός ⇝ Διατύπωση και Λύση Ανανεωτικής Εξίσωσης και συχνά Οριακή λύση με Β.Α.Θ.

β) Υπολογισμός ανανεωτικής συνάρτησης $m(t)$ (συνήθως $F_X \rightsquigarrow \tilde{F}_X \rightsquigarrow \tilde{m}_X \rightsquigarrow m_X$ ή με συνέλιξη ή με διαφορική εξίσωση) / Βασικοί υπολογισμοί

γ) ΣΑΘΚ! (SOS) (καλή μοντελοποίηση!) [τα α, β, γ βγάζουν πάνω από ένα θέμα]

1 Θέμα(-): Ουρές (Βασικά αποτελέσματα, ΑΜΤ, Απλές Μαρκοβιανές Ουρές)

0 Θέμα (+): "Λίγο απ' όλα": Δεσμευμένη Μέση Τιμή, Ιδιότητες Exp
(Η βαθμολογία θα είναι με άριστα το 10, αλλά θα υπάρχει κανονικοποίηση!)

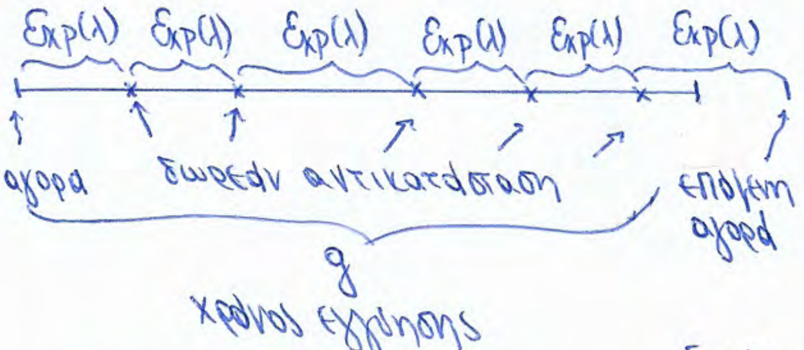
② Άσκηση ('Ασκηση 3, Φυλλάδιο e-class, Κάστη)

Προϊόν με συμβόλαιο αντικατάστασης. Αν το προϊόν χαλάσει μέσα σε χρόνο g από την αγορά του, αντικαθίσταται. Χρόνος ζωής $\sim Exp(\lambda)$. Τιμή αγοράς: c, Κόστος κατασκευής: d ($< c$). Να βρεθούν:

α) Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους για έναν πελάτη με τέτοιο συμβόλαιο

β) Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους από έναν πελάτη για την εταιρεία.

Λύση:



Ελέγχουμε πρώτα ότι το ΣΑΘΚ είναι εφαρμόσιμο και έχουμε (αφού δικαιολογήσουμε πρώτα ότι έχουμε μία αναγεννητική διαδικασία με στιγμές αναγέννησης τις στιγμές αγοράς):

Πολύ σημαντικό να τις καθορίσουμε (μας δείχνουν ποιος είναι ο κύκλος)

Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους πελάτη $\overset{\Sigma A\Theta K}{=} \dfrac{E\left[\begin{matrix}\text{κόστος σε}\\ \text{1 κύκλο}\end{matrix}\right]}{E\left[\begin{matrix}\text{διάρκεια}\\ \text{κύκλου}\end{matrix}\right]} = \dfrac{c}{\underbrace{g}_{\text{χρόνος εγγύησης}} + \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\text{μέσος χρόνος από τη λήξη της εγγύησης μέχρι τη βλάβη του προϊόντος}}}$

Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους εταιρείας ανά πελάτη $\overset{\Sigma A\Theta K}{=} \dfrac{E\left[\begin{matrix}\text{κέρδος σε}\\ \text{1 κύκλο}\end{matrix}\right]}{E\left[\begin{matrix}\text{διάρκεια}\\ \text{κύκλου}\end{matrix}\right]} =$

πλήθος αντικαταστάσεων — αρχικό προϊόν

$$= \frac{c - d\cdot\left(E[N]+1\right)}{g + \frac{1}{\lambda}}$$

(κέρδος) − (πόσες φορές θα του το δώσει δωρεάν)

N = #γεγονότων σε σ.δ. Poisson ρυθμού λ σε διάστημα μήκους g

$N \sim Poisson(\lambda g)$
$E[N] = \lambda g$

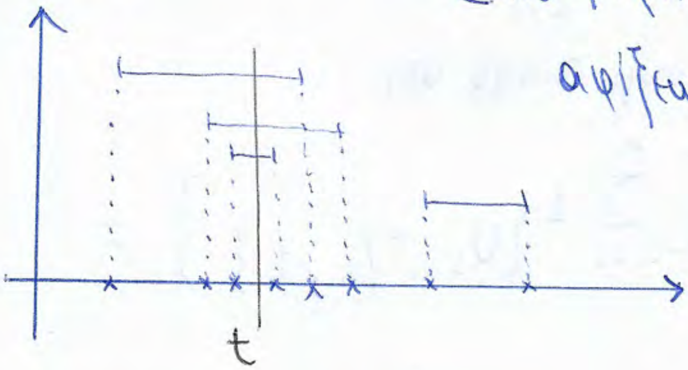
$$= \frac{c - d\cdot(\lambda g + 1)}{g + \frac{1}{\lambda}} = \frac{c}{g+\frac{1}{\lambda}} - d\cdot\lambda$$

③ Άσκηση (δύσκολη) (Άσκηση 12, Φυλλάδιο e-class, Poisson)

- Πελάτες φθάνουν σύμφωνα με σ.δ. Poisson ρυθμού λ
- Χρόνος παραμονής $\sim Exp(\mu)$
- $M(t)$ = # πελατών τη στιγμή t.

Να δειχθεί ότι $E[M(t)] = \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right)$

Λύση: Έστω η χρονική στιγμή t, $\{N(u): u \geq 0\}$ σ.δ. των αφίξεων, $I_1(t), I_2(t), \ldots$ τ.μ., όπου



$$I_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i\text{-οστός πελάτης βρίσκεται στο σύστημα τη στιγμή } t \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

S_i = χρόνος άφιξης του i-πελάτη και Y_i = χρόνος παραμονής του i-πελάτη.

Το σημαντικό είναι να βρούμε μία σωστή μαθηματική έκφραση για το $M(t)$.

Έχουμε ότι $M(t) = \sum_{i=1}^{\infty} I_i(t) \overset{\text{μας νοιάζει το πόσοι}}{\underset{\text{είναι στο σύστημα}}{=}} \sum_{i=1}^{N(t)} I_i(t)$, άρα

$$E[M(t)] = E\left[\sum_{i=1}^{\overset{\text{τ.μ.}}{N(t)}} I_i(t)\right] \overset{\text{τυχαίο άθροισμα άρα ΘΔΜΤ}}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N(t)=n] \cdot E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} I_i(t) \,\Big|\, N(t)=n\right] \overset{\text{περνάμε την πληροφορία της}}{\underset{\text{δέσμευσης, αλλά δεν τη διώχνουμε (Προσοχή στην ανεξαρτησία!)}}{=}}$$

η πληροφορία $N(t)=n$ της δέσμευσης

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N(t)=n] \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n} \underbrace{1\{S_i+Y_i>t\} \,\Big|\, N(t)=n}_{\text{Campbell}}\right] \overset{\text{Θ. Campbell}}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N(t)=n] \cdot E\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1\{U_{i:n}+Y_i>t\}}\right]$$

Ιδέα: το άθροισμα δεν αλλάζει αν αντί για τις διατεταγμένες $U_{i:n}$ βάλω τις αρχικές U_i

Παρατήρηση: Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.μ. και $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες (δεν χρειάζονται καν τυχαίες μεταβλητές: το αποτέλεσμα είναι καθαρά αριθμητικό - τετριμμένο!) και

$f(x)$ μια συνάρτηση. Τότε, $\sum_{i=1}^{n} f(X_{i:n}) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i)$.

Από την παραπάνω παρατήρηση, έχουμε τώρα ότι

$$E[M(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N(t)=n] \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n} 1_{\{U_{i:n}+Y_i>t\}}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N(t)=n] \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n} 1_{\{U_i+Y_i>t\}}\right] =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot Pr[N(t)=n]}_{E[N(t)]} \cdot Pr[\underbrace{U_i+Y_i>t}_{\substack{\text{για οποιοδήποτε } i \\ \text{(αφού είναι ισόνομες)}}}] \text{, όπου } U_i \sim \text{Uniform}([0,t]),$$

$Y_i \sim Exp(\mu)$, ανεξάρτητες (και, προφανώς, ισόνομες)

Έχουμε:

$$Pr[U_i+Y_i>t] \overset{\text{θοπ}}{=} \int_0^t Pr[Y_i>t-u] \cdot \underbrace{\frac{1}{t}\, du}_{f_{U_i}(u)\, du} =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\mu(t-u)}\, du = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\mu x}\, dx = \frac{1}{\mu t} \cdot (1-e^{-\mu t}).$$

Τελικά,

$$E[M(t)] = \frac{1}{\mu t} \cdot (1-e^{-\mu t}) \cdot \underbrace{E[N(t)]}_{\lambda t} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1-e^{-\mu t})$$

[Να σημειωθεί ότι το $Y_i \sim Exp(\mu)$ χρησιμοποιήθηκε ΜΟΝΟ στον υπολογισμό της $Pr[U_i+Y_i>t]$ και όχι στις βασικές ιδέες!]

Σχόλια: - Αν $Y \sim G(x)$ αντί της $Exp(\mu)$, πάλι μπορεί να υπολογιστεί η $E[M(t)]$.

- Με παρόμοιους υπολογισμούς, βρίσκεται η $Pr[M(t)=m]$, $m \geq 0$.

④ Άσκηση

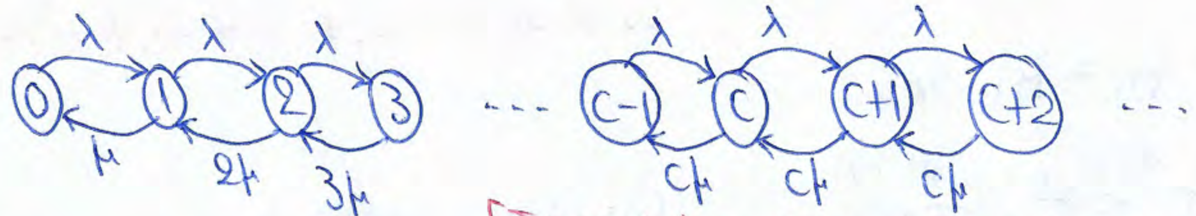
M/M/c ουρά (Είναι η άσκηση 10 του φυλλαδίου της e-class· Μία λύση της υπάρχει στο αρχείο με τις λύσεις)

- Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
- c υπηρέτες, ∞ χωρητικότητα

$\left.\right\} P_n = ?$

Λύση: $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \begin{cases} \underbrace{n \cdot \mu}_{\text{min n-το πλήθος Exp}(\mu)} , & n < c \\ n \cdot c , & n \geq c \end{cases}$

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



[Στο αρχείο με τις λύσεις χρησιμοποιείται η ποσότητα B^{-1} στην αρχή. Είναι απλώς συμβολισμός για τη σειρά που εμφανίζουμε παρακάτω, για το P_0 και την ευστάθεια]

Στάσιμη κατανομή:

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \cdot P_0 \overset{\rho = \frac{\lambda}{\mu}}{=} \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0 , & n < c \\ \frac{\rho^n}{c! \cdot c^{n-c}} \cdot P_0 , & n \geq c \end{cases}$$

. Για να δούμε αν το σύστημα είναι ευσταθές και να βρούμε το P_0,

χρησιμοποιούμε εξίσωση κανονικοποίησης:

$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Leftrightarrow \left(1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} \right) \cdot P_0 = 1$. Έχουμε ευστάθεια ανν

$\sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} < \infty \Leftrightarrow \frac{\rho}{c} < 1 \Leftrightarrow \rho < c$. Υπό τη συνθήκη ευστάθειας,

$P_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}} \right)^{-1}$ και φτιάχνουμε τα P_n.

⑤ Άσκηση (μόνο η μοντελοποίηση)

M/M/1 ουρά με αποθαρρυνόμενους πελάτες (balking)

- Κάθε αφικνούμενος πελάτης που βρίσκει n πελάτες στο σύστημα, φεύγει άμεσα με πιθανότητα q_n.

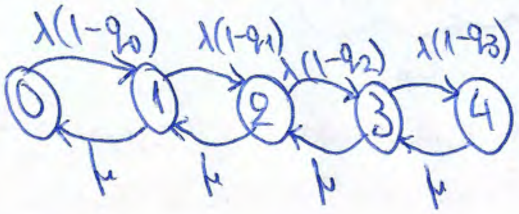
≠ εισερχόμενος

Λύση:

Πρώτα τους ρυθμούς αφίξεων και εξυπηρετήσεων:

- $\lambda_n = \underbrace{\lambda\cdot(1-q_n)}_{\text{διάσπαση Poisson}}, \; n\geq 0$ (σε αυτούς που μπαίνουν, με ρυθμό $(1-q_n)\lambda$ και σε αυτούς που δεν μπαίνουν, με ρυθμό λq_n)

- $\mu_n = \mu, \; n\geq 1$



και κάνουμε πράξεις όπως πριν (συνήθως, δίνεται συγκεκριμένο q_n, πχ $q_n=\frac{n}{n+1}, n\in\mathbb{N}$)

⑥ Άσκηση (μόνο η μοντελοποίηση)

M/M/1 ουρά με ανυπόμονους πελάτες

- Κάθε πελάτης έχει χρόνο υπομονής $\sim Exp(v)$ όσο βρίσκεται στον χώρο αναμονής.

Λύση:

Όλο το θέμα στις Απλές Μαρκοβιανές Ουρές είναι ο καθορισμός των λ_n και μ_n:

- $\lambda_n = \lambda, \; n\geq 0$ (αφού η ιδιαιτερότητα της ουράς είναι στις αναχωρήσεις, όχι στις αφίξεις)

- $\mu_n = \underbrace{\mu}_{\text{ένας εξυπηρετείται}} + \underbrace{(n-1)\cdot v}_{(n-1)\text{ ανυπόμονοι}}, \; n\geq 1$

min

(7) <u>Άσκηση</u> (μόνο η μοντελοποίηση)

M/M/1 ουρά με ταχύτητα εξυπηρέτησης

- Ο υπηρέτης δουλεύει με ταχύτητα u_n όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα.

Λύση: Αν X ο χρόνος εξυπηρέτησης υπό κανονικές συνθήκες και v_n η ταχύτητα, τότε ο πραγματικός χρόνος εξυπηρέτησης είναι $\frac{X}{v_n}$. Όμως, $X \sim Exp(\mu)$, άρα $\frac{X}{v_n} \sim Exp(\mu \cdot v_n)$. Βρίσκουμε τώρα τους <u>ρυθμούς</u>:

$\lambda_n = \lambda,\ n \geq 0$ και $\mu_n = \mu \cdot v_n,\ n \geq 1$