30/5/19 Μάθημα 22

Σ.μ.ε.ε.

Ουρές Αναμονής

① Άσκηση

Ανάλυση Μέσης Τιμής για την M/M/1 ουρά με χρόνους εκκίνησης

- Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS πειθαρχία ουράς

- Άδειασμα συστήματος $\rightsquigarrow$ ακαριαία απενεργοποίηση υπηρέτη
- Άφιξη σε κενό σύστημα $\rightsquigarrow$ έναρξη χρόνου ενεργοποίησης υπηρέτη $\sim Exp(\theta)$

$\underbrace{E[Q]=?\ ,\ E[S]=?}_{\text{παραπέμπει σε Ανάλυση Μέσης Τιμής}}$

$E[\tilde{I}]=?\ ,\ E[\tilde{Y}]=?\ ,\ \pi=$ ποσοστό χρόνου που ο υπηρέτης είναι απασχολημένος $=?$

Λύση:

Θέλουμε να βρούμε $E[Q]$ και $E[S]$, άρα παίρνουμε τις δύο γνωστές σχέσεις:

Νόμος Little: $E[Q]=\lambda\cdot E[S]$ (1)

Έστω επιλεγμένος πελάτης και Q^- το πλήθος των πελατών που βρίσκει κατά την άφιξή του. Έτσι όπως είναι δομημένο το πρόβλημα, πρέπει να ξέρουμε κάθε φορά αν ο υπηρέτης είναι απενεργοποιημένος ή όχι, άρα θέτουμε

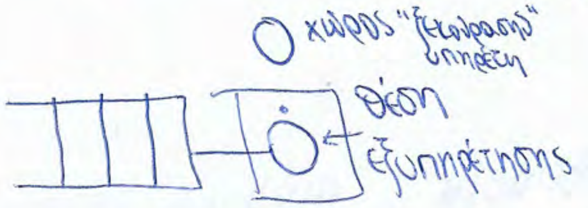
$I^- =$ κατάσταση του υπηρέτη κατά την άφιξη του πελάτη $= \begin{cases} 1, & \text{ενεργοποιημένος} \\ 0, & \text{ανενεργός} \end{cases}$ (1)

Δεσμεύοντας στο Q^-, παίρνουμε

$$E[S] = \underbrace{\left(E[Q^-]+1\right)\cdot \frac{1}{\mu}}_{\text{δεν έχει να κάνει με το } I^-=0 \text{ ή } I^- \text{ όσοι είναι μπροστά, θα πρέπει να τους περιμένει ο πελάτης}} + Pr[I^-=0]\cdot \underbrace{\frac{1}{\theta}}_{\text{μέσος χρόνος ενεργοποίησης του υπηρέτη}} \quad (2)$$

Λόγω PASTA, έχουμε ότι

$Q^- \overset{d}{=} Q$ και $I^- \overset{d}{=} I$, όπου I η κατάσταση του υπηρέτη σε συνεχή χρόνο σε ισορροπία. Πρέπει, λοιπόν, να βρούμε την $Pr[I=0]$.



Εφαρμόζουμε τον Νόμο του Little στη θέση εξυπηρέτησης:

$$E[Q_s] = \lambda \cdot E[\underbrace{X}_{\text{χρόνος εξυπηρέτησης}}] = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \rho \quad (3), \text{ όπου}$$

$$E[Q_s] = Pr[Q_s = 1] = Pr[I=1] = \pi$$

[απλό, αλλά ταυτόχρονα εντυπωσιακό αποτέλεσμα: το να κάνει ενδιάμεσα διακοπές ο υπηρέτης, δεν αλλάζει το ποσοστό του χρόνου που θα είναι απασχολημένος, πάλι ρ είναι· αλλάζει τον τρόπο που θα είναι απασχολημένος!]

Από τις (1), (2), (3), παίρνουμε:

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S] = \lambda \cdot \left(\frac{E[Q]+1}{\mu} + \frac{1-\rho}{\theta} \right) \Rightarrow$$

$$E[Q] = \rho \cdot E[Q] + \rho + \frac{\lambda(1-\rho)}{\theta} \Rightarrow E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\lambda\cancel{(1-\rho)}}{\theta\cancel{(1-\rho)}} \Rightarrow$$

$$\underbrace{E[Q]}_{\text{Μέσο \#πελατών με χρόνους επανεκκίνησης}} = \underbrace{\frac{\rho}{1-\rho}}_{\text{Μέσο \# πελατών στην κλασική M/M/1}} + \underbrace{\frac{\lambda}{\theta}}_{\text{"επιβάρυνση"}} = E[Q_{M/M/1}] + \lambda \cdot \frac{1}{\theta}, \text{ οπότε}$$

$\lambda \cdot \frac{1}{\theta}$: (ρυθμός αφίξεων)·(μέσος χρόνος ξεκούρασης υπηρέτη)

$$E[S] = \frac{1}{\lambda} E[Q] = \underbrace{\frac{1}{\mu(1-\rho)}}_{E[S_{M/M/1}]} + \frac{1}{\theta}$$

Περίεργη διαταραχή: φαινομενικά, δε θα έπρεπε να υποφέρουν όλοι την ξεκούραση του υπηρέτη, αλλά μόνο ο πρώτος. Ο λόγος είναι ότι ο πρώτος την υποφέρει άμεσα, ενώ οι υπόλοιποι έμμεσα, μέσω των υπολοίπων

Έστω $\tilde{I}$ = περίοδος αργίας = χρόνος από απενεργοποίηση υπηρέτη μέχρι την επανενεργοποίησή του $= \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\text{μέσος χρόνος μέχρι να έρθει ξανά πελάτης}} + \underbrace{\frac{1}{\theta}}_{\text{μέσος χρόνος επανενεργοποίησης του υπηρέτη}}$

και

$\tilde{Y}$ = περίοδος συνεχούς λειτουργίας = χρόνος από ενεργοποίηση υπηρέτη ως την απενεργοποίησή του ,

Για να βρούμε τα $E[\tilde{I}]$, $E[\tilde{Y}]$, χρησιμοποιούμε <u>Σ.Α.Θ.Κ.</u>: (πολύ ισχυρό!)

αναφέρεται σε μονάδες που συσσωρεύονται, όχι απαραίτητα σε χρήματα → εδώ έχουμε χρονικές μονάδες!

$$\frac{E[\tilde{Y}]}{E[\tilde{Y}]+E[\tilde{I}]} = \text{Μακροπρόθεσμο Μέσο ποσοστό χρόνου που ο υπηρέτης εργάζεται} = \underbrace{P_r[I=1]=\rho}_{\pi} \Rightarrow$$

$$E[\tilde{Y}] = \rho \cdot E[\tilde{Y}] + \rho \cdot \left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\theta}\right) \Rightarrow E[\tilde{Y}] = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\theta}\right).$$

② <u>Άσκηση</u> (Παραλλαγή της προηγούμενης)

<u>M/M/1 με την K-πολιτική ενεργοποίησης</u>

- Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS πειθαρχία ουράς

- Άδειασμα συστήματος → ακαριαία απενεργοποίηση υπηρέτη
- Μόλις συσσωρευθούν K πελάτες, έχουμε ακαριαία ενεργοποίηση του συστήματος

$E[Q]=?$, $E[S]=?$, π = ποσοστό χρόνου ενεργοποιημένου υπηρέτη $=?$, $\underbrace{E[\tilde{I}]}_{\text{περίοδος αργίας}}=?$, $\underbrace{E[\tilde{Y}]}_{\text{περίοδος συνεχούς λειτουργίας}}=?$

Λύση:

Νόμος Little: $E[Q]=\lambda \cdot E[S]$ (1).

Έστω επιλεγμένος πελάτης, Q = πλήθος πελατών που βρίσκει φθάνοντας ,

I^- = κατάσταση υπηρέτη που βρίσκει ο αφικνούμενος πελάτης.

$$E[S] = Pr[I^-=0] \cdot E[S|I^-=0] + Pr[I^-=1] \cdot E[S|I^-=1] \quad (2)$$

Λόγω της ιδιότητας PASTA, $Q^- \overset{d}{=} Q$ και $I^- \overset{d}{=} I$. Ακριβώς όπως στην άσκηση 1 (N. Little στον χώρο εξυπηρέτησης), έχουμε

$$\pi = Pr[I=1] = \rho, \text{ άρα } Pr[I^-=0] = 1-\rho \text{ και } Pr[I^-=1] = \rho. \quad (3)$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά:

$$E[S|I^-=1] = E\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{Q^-+1} \underbrace{X_i}_{\sim Exp(\mu)}}_{\text{θα περιμένει } \underbrace{Q^-}_{\text{μπροστινοί}} + \underbrace{1}_{\text{ο ίδιος}} \text{ χρόνους } Exp(\mu)} \Big| I^-=1\Big] =$$

$$= \frac{1}{\mu} E[Q^-+1 | I^-=1] = \frac{1}{\mu} \cdot E[Q^- | I^-=1] + \frac{1}{\mu} \quad (4)$$

Μένει το $E[S|I^-=0]$. Αν ο υπηρέτης είναι απενεργοποιημένος ($I^-=0$) τη στιγμή της άφιξης, θα περιμένω:

$\underbrace{K-(Q^-+1)}_{\text{θέλουμε να φτάσουμε τους K, για να ενεργοποιηθεί ο υπηρέτης}}$ το πλήθος πελάτες να αφιχθούν

και $\underbrace{Q^-+1}_{\text{τόσους είδα εξ' αρχής μπροστά μου}}$ το πλήθος πελάτες να εξυπηρετηθούν. Επομένως,

$$E[S|I^-=0] = \frac{E[\overbrace{K-Q^--1}^{\text{τόσοι πρέπει να έρθουν}} | I^-=0]}{\underbrace{\lambda}_{1/\lambda:\text{ μέσος χρόνος άφιξης}}} + \frac{\overbrace{E[Q^-+1|I^-=0]}^{\text{τόσοι πρέπει να εξυπηρετηθούν}}}{\underbrace{\mu}_{1/\mu:\text{ μέσος χρόνος εξυπηρέτησης}}} \quad (5)$$

Από τις (1), (2), (3), (4) και (5), παίρνουμε:

$$E[S] = \Pr[I^- = 0]\cdot \frac{K-1 - E[Q^- \mid I^- = 0]}{\lambda} +$$

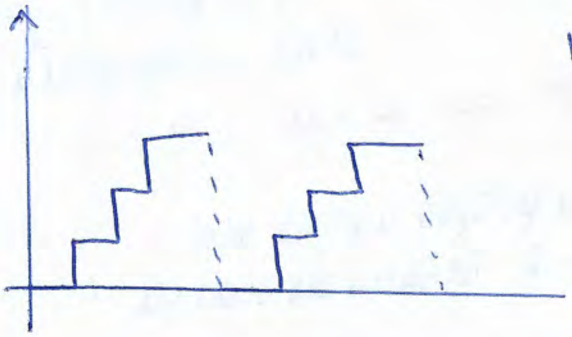
$$+ \underbrace{\Pr[I^- = 0]\cdot \frac{E[Q^- \mid I^- = 0]+1}{\mu} + \Pr[I^- = 1]\cdot \frac{E[Q^- \mid I^- = 1]+1}{\mu}}_{\frac{E[Q^-]+1}{\mu}} \quad (6)$$

Μένει το $E[Q^- \mid I^- = 0]$. Λόγω της PASTA (εδώ, τα "Poisson σημεία" είναι οι στιγμές άφιξης πελάτη), έχουμε $E[Q^- \mid I^- = 0] = E[Q \mid I = 0]$.

Αν κοιτάμε το Q μόνο όταν $I=0$ (περίοδοι αναμονής για ενεργοποίηση), έχουμε:

$$Q: \begin{array}{ll} 0 & Exp(\lambda) \\ 1 & Exp(\lambda) \\ 2 & Exp(\lambda) \\ \vdots & \\ K-1 & Exp(\lambda) \end{array}$$

"Ανανοίγουμε μια τυχαία χρονική στιγμή τα μάτια μας, είναι εξ' ίσου πιθανό να δούμε $0, 1, 2, \ldots, K-1$ πελάτες", άρα $(Q \mid I = 0) \sim Uniform(\{0, 1, \ldots, K-1\})$.



Άρα, $(Q \mid I=0) \sim Uniform(\{0,1,\ldots,K-1\})$, οπότε $E[Q \mid I=0] = \frac{K-1}{2}$. Τελικά,

$$E[S] = (1-\rho)\cdot \frac{K-1}{2\lambda} + \frac{E[Q]+1}{\mu}$$, άρα, από Νόμο Little,

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S] = \cancel{\lambda}\cdot (1-\rho)\cdot \frac{K-1}{2\cancel{\lambda}} + \lambda \cdot \frac{E[Q]+1}{\mu} \overset{\rho = \frac{\lambda}{\mu}}{\Longrightarrow}$$

$$E[Q] = \underbrace{\frac{K-1}{2}}_{\text{διαταραχή}} + \underbrace{\frac{\rho}{1-\rho}}_{E[Q_{M/M/1}]}.$$ Από Νόμο Little,

$$E[S] = \frac{1}{\lambda}\cdot E[Q] = \frac{K-1}{2\lambda} + \frac{1}{\mu\cdot(1-\rho)}.$$

$E[\tilde{I}] = \dfrac{K}{\lambda}$ και, από ΣΑΘΚ, $\dfrac{E[\tilde{y}]}{E[\tilde{y}]+E[\tilde{I}]} = \rho \Rightarrow$

$$E[\tilde{y}] = \frac{K\rho}{\lambda(1-\rho)} \overset{\rho=\frac{\lambda}{\mu}}{=} \frac{K}{\mu(1-\rho)}.$$

③ Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

Έστω $Q(t)$ = πλήθος πελατών στο σύστημα τη στιγμή t

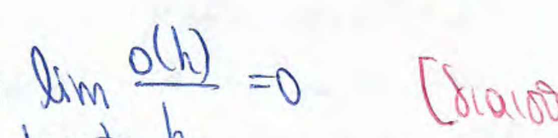
Απλή Μαρκοβιανή Ουρά $\Longleftrightarrow$ η $\{Q(t)\}$ είναι αλυσίδα γέννησης-θανάτου

$$\Longleftrightarrow \Pr\left[Q(t+h)=j \mid Q(u): 0\le u<t, Q(t)=i\right] = \begin{cases} \lambda_i h + o(h), & j=i+1 \\ \mu_i h + o(h), & j=i-1 \\ 1-(\lambda_i+\mu_i)h + o(h), & j=i \\ o(h), & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{o(h)}{h} = 0$ [διαισθητικά, μπορεί μόνο να έρθει ή να φύγει ένας πελάτης] και λ_i = δεσμευμένος ρυθμός άφιξης όταν υπάρχουν i πελάτες στο σύστημα,

μ_i = δεσμευμένος ρυθμός εξυπηρέτησης όταν υπάρχουν i πελάτες, $p_i = \Pr[Q=i]$ = μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που υπάρχουν i πελάτες

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



Ισχύει ότι $p_j = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\text{χρόνος στο } (0,t] \text{ όπου } \#\text{πελατών}=j}{t}$ με πιθ. 1,

$$\lambda_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\#\text{μεταβάσεων στο } (0,t] \text{ του } \#\text{πελατών } j\to j+1}{\text{χρόνος στο } (0,t] \text{ που } \#\text{πελατών}=j}$$
με πιθ. 1

[διαισθητικά, πόσο "συχνά" πάει το σύστημα από $Q=j$ σε $Q=j+1$]

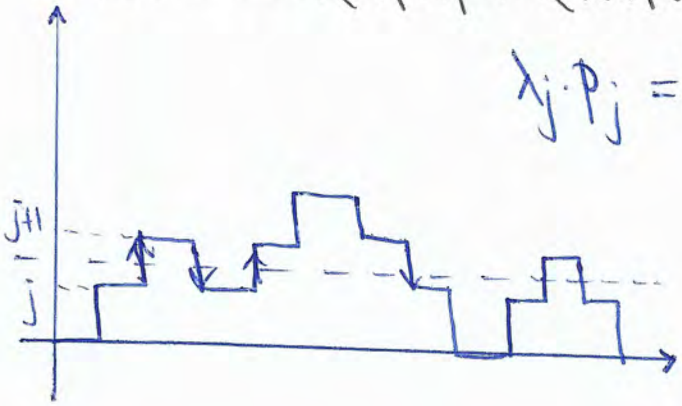
και $\mu_j = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\#\text{μεταβάσεων στο } (0,t] \text{ του } \#\text{πελατών } j\to j-1}{\text{Χρόνος στο } (0,t] \text{ που } \#\text{πελατών} = j}$, με πιθ. 1

Άρα,

$$\lambda_j \cdot p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\#\text{μεταβάσεων του } \#\text{πελατών } j\to j+1}{t} = \text{ρυθμός μεταβάσεων } j\to j+1$$

$$\mu_{j+1} \cdot P_{j+1} = \dots = \text{ρυθμός μεταβάσεων } j+1 \to j$$

Είχαμε δει παλιότερα ότι στις μεμονωμένες μεταβάσεις ισχύει $(a_j) = (d_j)$. Αυτό δημιουργεί μία αίσθηση "ισορροπίας" στο σύστημα. Ακριβώς με το ίδιο επιχείρημα, παίρνουμε:

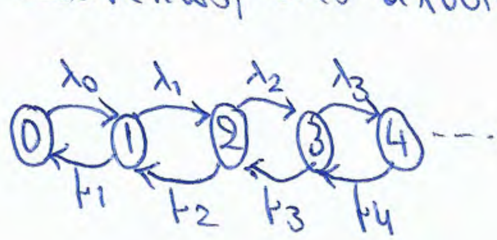


$$\lambda_j \cdot P_j = \mu_{j+1} \cdot P_{j+1} \Rightarrow P_{j+1} = \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \cdot P_j \text{, οπότε}$$

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot P_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} \cdot P_{n-2} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \cdot \dots \cdot \lambda_0}{\mu_n \cdot \mu_{n-1} \cdot \dots \cdot \mu_1} \cdot P_0 \text{, } n \geq 1.$$

Συνεπώς, στις αλυσίδες γέννησης - θανάτου, έχουμε:



$P_n = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \cdot P_0$, $n \geq 1$, άρα για να βρεθεί το P_0, χρησιμοποιούμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$.

- Αν συγκλίνει η σειρά → ευστάθεια
- Αν δεν συγκλίνει → αστάθεια.

<u>Για τα θέματα</u>: Υπολογισμοί στην σ.δ. Poisson (ένα θέμα), ΒΑΘ, ΣΑΘ και ΣΑΘΚ (πολύ καλά το ΣΑΘΚ), ένα θέμα με ουρές και άλλα θέματα με διάφορες εφαρμογές.