20/5/19

Σ.μ.Ε.Ε.

Μάθημα 20

# Ουρές Αναμονής
# Βασικά αποτελέσματα

## ① Βασικές ποσότητες και μέτρα απόδοσης

Δεδομένα:

- Τύπος συστήματος $\overbrace{(A/B/c/k(\ \ ))}^{\text{ονοματολογία Kendall}}$

θέλουμε αριθμητικά μέτρα $(a, \lambda, b, \mu)$

- $a$: Μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων

  $\lambda = \frac{1}{a}$: Ρυθμός αφίξεων

- $b$: Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

  $\mu = \frac{1}{b}$: Ρυθμός εξυπηρέτησης (διαφορετικός από τον ρυθμό των αναχωρήσεων, αφού ο υπηρέτης μπορεί να έχει διαλείμματα κλπ. Σε ένα ευσταθές σύστημα, ισχύει ρυθμός αναχωρήσεων = ρυθμός αφίξεων (λογικό, αλλιώς θα "έσκαγε" η ουρά) )

- Βασικά μέτρα:

  Q: πλήθος(#) πελατών στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας

  S: χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας

  Ερωτήματα σημαντικά: $E[Q] = ;$ , $E[S] = ;$

$p_j = Pr$ [j πελάτες στο σύστημα σε συνεχή χρόνο]

$a_j = Pr$ [j πελάτες σε στιγμή άφιξης]

$d_j = Pr$ [j πελάτες σε στιγμή αναχώρησης]

} θα συνδέσουμε αυτές τις ποσότητες με κάποια σημαντικά θεωρήματα (Νόμος Little κλπ)

Θα δούμε ορισμένα βασικά αποτελέσματα τώρα.

## ② Βασικό αποτέλεσμα 1: Χαρακτηρισμός ευστάθειας

Ορίζουμε την ποσότητα $\rho = \underbrace{\lambda}_{\text{ρυθμός αφίξεων}} \cdot \overbrace{b}^{\text{μέσος χρόνος εξυπηρέτησης}}$ : ρυθμός (ένταση) συνωστισμού

[Το ρ εκφράζει τη μέση ποσότητα δουλειάς που μπαίνει στο σύστημα:

$$\rho = \lambda \cdot b = \begin{pmatrix}\text{με τι ρυθμό} \\ \text{μπαίνουν πελάτες}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{πόσο χρόνο} \\ \text{θέλει ο καθένας}\end{pmatrix}$$

άρα αν $c = \#$υπηρετών, τότε είναι λογικό να θέλουμε ως συνθήκη ευστάθειας την $\rho < c$]

**Θεώρημα** Έστω $GI/GI/c$ σύστημα με ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων ή χρόνους εξυπηρετήσεων απεριοδικούς. Τότε, υπάρχουν δύο αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις:

i) $\rho < c \Leftrightarrow$ Ευστάθεια: $\exists\, p_j, a_j, d_j > 0$ και $\sum_j p_j = \sum_j a_j = \sum_j d_j = 1$

(αν έστω μία σειρά ήταν $<1$, πχ $\sum_j p_j < 1$, τότε θα υπήρχε μάζα στο άπειρο, δηλαδή θα είχαμε θετική πιθανότητα στον απειρισμό της ουράς)

ii) $\rho \geq c \Leftrightarrow$ Αστάθεια: $p_j = a_j = d_j = 0$ (αφού είναι ασταθές, οριακά θα έχει απειριστεί η ουρά, άρα $Q = \infty$ με πιθ. 1, οπότε η πιθανότητα να υπάρχουν $j$ πελάτες, για $j \in \mathbb{N}$, είναι 0)

## ② Βασικό αποτέλεσμα 2: Νόμος Little (1962, MIT)

**Θεώρημα** Σε ευσταθές σύστημα, ισχύει $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

Πέρα από την τεχνική απόδειξη υπάρχει μία ωραία οικονομική ερμηνεία (διαισθητικά, έχουμε όντως μία αίσθηση αναλογίας $E[Q]$ και $E[S]$).

Οικονομική αξιολόγηση (ιδέα: για δεδομένο κέρδος, είναι το ίδιο να το βγάλω όλο μαζί με το να το βγάλω εισπράττοντας μία χρηματική μονάδα ανά χρονική μονάδα):

Έστω ότι κάθε πελάτης πληρώνει 1 χρηματική μονάδα ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα. Τότε,

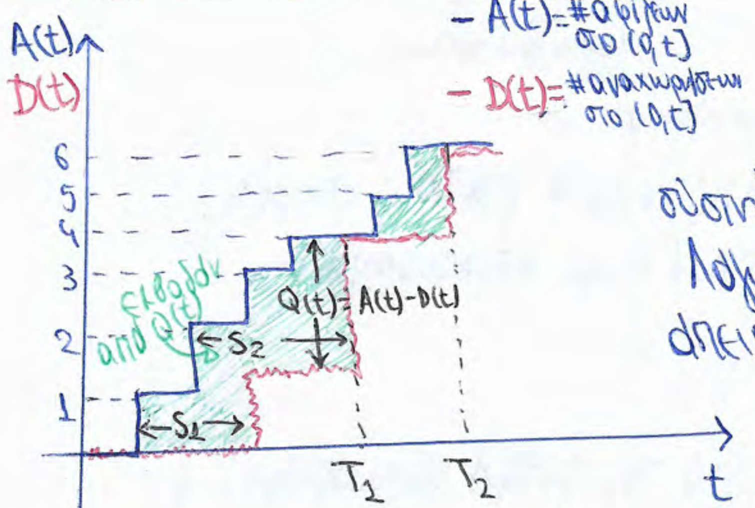
1] Αν η πληρωμή γίνεται με τρόπο συνεχή, έχουμε:

$$\text{Μέσο έσοδο ανά χρονική μονάδα} = E[Q]$$

2] Αν η πληρωμή γίνεται ανά πελάτη (π.χ. στις στιγμές αναχώρησης), έχουμε:

$$\text{Μέσο έσοδο ανά χρονική μονάδα} = \underbrace{\lambda}_{\substack{\text{ρυθμός αφίξεων} \\ \text{ρυθμός αναχωρήσεων}}} \cdot \underbrace{E[S]}_{\substack{\text{μέση πληρωμή} \\ \text{ανά πελάτη}}}$$

Ιδέα της μαθηματικής απόδειξης:




$Q(t) = A(t) - D(t) =$ πλήθος πελατών τη στιγμή $t$

Έστω $T_1, T_2, \dots$ οι στιγμές που το σύστημα αδειάζει (δηλαδή $A(t) = D(t)$, για $t = T_1, T_2, \dots$). Λόγω της ευστάθειας, το σύστημα αδειάζει άπειρες φορές, δηλαδή υπάρχει άπειρη ακολουθία $T_1, T_2, \dots$ με $T_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

Έχουμε:

$$E[Q] = \underbrace{\lim_{t\to\infty}}_{\substack{\text{τα λεφτά ανά} \\ \text{χρονική μονάδα}}} \frac{E\left[\int_0^t Q(u)\,du\right]}{\underbrace{t}_{\substack{\text{τα λεφτά} \\ \text{στο τέλος}}}} \underset{\substack{\text{αντικαθιστούμε} \\ \text{το } t\to\infty \text{ με} \\ T_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty}}{\overset{\substack{n\to\infty \\ T_n\to\infty}}{=\!=}} \lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\int_0^{T_n} Q(u)\,du\right]}{E[T_n]}$$

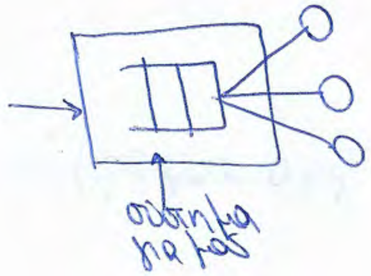
Όμως, $\underbrace{E\left[\int_0^{T_n} Q(u)\,du\right]}_{\text{Riemann (κατακόρυφα)}} = \underbrace{E\left[\sum_{k=1}^{A(T_n)} S_k\right]}_{\text{Lebesgue (οριζόντια)}}$ (η μαθηματικοποίηση της οικονομικής ερμηνείας), άρα

$$E[Q] = \lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\sum_{k=1}^{A(T_n)} S_k\right]}{E[T_n]} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{E[A(T_n)]}{E[T_n]}}_{\lambda} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{E\left[\sum_{k=1}^{A(T_n)} S_k\right]}{E[A(T_n)]}}_{E[S]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[Q] = \lambda \cdot E[S].$$

③ Άμεσες συνέπειες του Νόμου του Little (μπορούμε να τον εφαρμόζουμε σε κατάλληλα υποσυστήματα του αρχικού συστήματος, πχ χώρος εξυπηρέτησης κλπ)

1) Εφαρμογή στον χώρο αναμονής

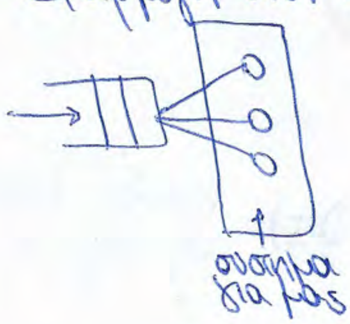



Θέλει πολλή προσοχή η επιλογή του σωστού λ στον Ν. Little!

$$E[\underbrace{Q_q}_{\text{πλήθος πελατών σε αναμονή}}] = \lambda \cdot E[\underbrace{W}_{\text{χρόνος αναμονής πελάτη}}]$$

(Μπορεί να έχουμε λ(αφικνούμενου), λ(εισερχόμενου) κλπ)

2) Εφαρμογή στον χώρο εξυπηρέτησης




$$E[\underbrace{Q_s}_{\substack{\#\text{ πελατών στον χώρο εξυπηρέτησης} \\ \| \\ \#\text{ αντίστοιχων υπηρετών (απασχολημένων)}}}] = \lambda \cdot E[\underbrace{X}_{\substack{\text{χρόνος παραμονής στον χώρο εξυπηρέτησης} \\ \| \\ \text{χρόνος εξυπηρέτησης}}}] = \lambda \cdot b = \rho$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει πληροφορία για τους υπηρέτες:

Έστω
$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο υπηρέτης } i \text{ είναι απασχολημένος} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Παίρνουμε μία άλλη ερμηνεία για τον ρυθμό συνωστισμού $\rho$:

$\rho$ = (μέση εισερχόμενη εργασία στο σύστημα)/(χρονική μονάδα)

= μέσος αριθμός απασχολημένων υπηρετών

= μέσος αριθμός πελατών στον χώρο εξυπηρέτησης

Επίσης, $E\left[\sum_{i=1}^{c} I_i\right] = \rho \Rightarrow \sum_{i=1}^{c} E[I_i] = \rho$. Σε περίπτωση όμοιων υπηρετών, τυχαίας επιλογής υπηρέτη από πελάτη, έχουμε $c \cdot E[I_i] = \rho \Rightarrow$

$\Rightarrow Pr[\text{απασχολημένου υπηρέτη}] = E[I_i] = \frac{\rho}{c}$. Έχουμε, λοιπόν, ότι

$$\frac{\rho}{c} = \begin{array}{c}\text{πιθανότητα}\\ \text{απασχολημένου}\\ \text{υπηρέτη}\end{array} = \begin{array}{c}\text{ποσοστό χρόνου που}\\ \text{κάθε υπηρέτης}\\ \text{εξυπηρετεί}\end{array}$$

Επιπλέον, ειδικά για το σύστημα GI/GI/1, έχουμε:

$$E[Q_S] = \rho \Rightarrow Pr[Q_S = 1] = \rho \Rightarrow Pr[Q \geq 1] = \rho \Rightarrow \underbrace{Pr[Q=0] = 1-\rho}$$

πολύ καλό αποτέλεσμα: η πιθ. κενού συστήματος εξαρτάται μόνο από το ρ, δηλαδή τα λ και b, και όχι από τις υποκείμενες διαδικασίες των πελατών. Ισχύει ΜΟΝΟ για 1 υπηρ.

④ Βασικό αποτέλεσμα 3:
Ιδιότητα Μεμονωμένων Μεταβάσεων (Αφίξεων / Αναχωρήσεων)

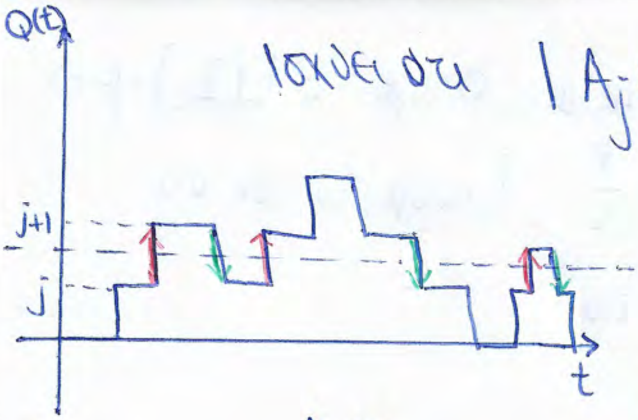
Θεώρημα Αν σε ευσταθές σύστημα οι πελάτες έρχονται και αναχωρούν ένας-ένας, τότε $(a_j) = (d_j)$ (στο παράδειγμα με το βαπόρι, που έφευγαν ανά ομάδες, δεν ίσχυε)

Ιδέα απόδειξης: Έστω $A(t) = \#$αφίξεων στο $(0,t]$, $A_j(t) = \#$αφίξεων στο $(0,t]$ που βρίσκουν $j$ πελάτες μπαίνοντας, $D(t) = \#$αναχωρήσεων στο $(0,t]$, $D_j(t) = \#$αναχωρήσεων στο $(0,t]$ που αφήνουν $j$ πελάτες.

$$\underbrace{a_j = \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)}}_{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό αφίξεων που βλέπουν } j \text{ πελάτες}}, \quad \underbrace{d_j = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)}}_{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό αναχωρήσεων που βλέπουν } j \text{ πελάτες}} \quad \text{με πιθ. } 1 \qquad (1)$$

Λόγω ευστάθειας,

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμος ρυθμός αφίξεων}} \overset{(\geq \text{ προφανώς}) \; (\leq \text{ απαιτείται λόγω ευστάθειας})}{=} \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμος ρυθμός αναχωρήσεων}} \qquad (2)$$




Ισχύει ότι $|A_j(t) - D_j(t)| \le 1$ (3).

Από τις (1), (2), (3), παίρνουμε:

$$a_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{A_j(t)}{t}}{\frac{A(t)}{t}} \overset{(2)}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{A_j(t)}{t}}{\frac{D(t)}{t}} \overset{\substack{|A_j(t)-D_j(t)|\le 1 \\ \text{άρα} \\ \lim_{t\to\infty}\frac{A_j(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{D_j(t)}{t}}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{D_j(t)}{t}}{\frac{D(t)}{t}} = d_j$$

⑤ <u>Βασικό αποτέλεσμα 4:</u>

<u>Ιδιότητα Poisson Arrivals See Time Averages (PASTA)</u> (Wolff, 1982)

<u>Θεώρημα</u> Σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με στοχαστική διαδικασία αριθμού πελατών, $\{Q(t)\}$, και διαδικασία αφίξεων $\{A(t)\}$. Αν

i) η $\{A(t)\}$ είναι σ.δ. Poisson

ii) για κάθε $t$ οι $\{Q(u) : u<t\}$ και $\{A(u) : u \ge t\}$ είναι ανεξάρτητες,

τότε $(p_j) = (a_j)$ [διαισθητικά, λόγω: Poisson σημαίνει εντελώς τυχαίο, άρα το να κοιτάμε το σύστημα στις αφίξεις (δηλαδή σε «Poisson στιγμές») είναι το ίδιο με το να το κοιτάμε σε συνεχή χρόνο]