13/5/19

Σ.μ.Ε.Ε.

Μάθημα 18

Εφαρμογές του ΣΑΘΚ
Αναγεννητικές Διαδικασίες

① ΣΑΘΚ

Έστω $\{C(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία κόστους. Τότε,

$$\lim \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}$$

② Αναγεννητικές Διαδικασίες

Ορισμός Μία στοχαστική διαδικασία $\{X(t): t \geq 0\}$ λέγεται αναγεννητική διαδικασία αν υπάρχει τ.μ. $S_1 \geq 0$ με $Pr[S_1 > 0] > 0$ και $Pr[S_1 < \infty] = 1$, ώστε

i) οι $\{X(t): 0 \leq t < S_1\}$ και $\{X(t): t \geq S_1\}$ είναι ανεξάρτητες.

("το τι έγινε πριν την S_1 δεν μας λέει τίποτα για το τι γίνεται μετά την S_1.")

το ανάλογο των ισόνομων τ.μ. στις στοχαστικές διαδικασίες

ii) η $\{X(t): t \geq S_1\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμη με την $\{X(t): t \geq 0\}$

[Ιδέα: υπάρχει ένας πεπερασμένος χρόνος S_1 στον οποίο ουσιαστικά reset-άρει η σ.δ. Αντίστοιχα, θα υπάρχει $S_2 > S_1$ στη νέα σ.δ. ώστε να συμβαίνουν τα παραπάνω και ούτω καθεξής. Οδηγούμαστε, έτσι, από μία αναγεννητική διαδικασία σε μία ανανεωτική διαδικασία]

Επομένως, υπάρχει ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$ ώστε

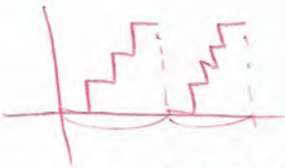
i) οι
$$\{X(t): 0 \le t < S_1\}$$
$$\{X(t): S_1 \le t < S_2\}$$
$$\{X(t): S_2 \le t < S_3\}$$
$$\vdots$$
(κ.ο.κ.)

είναι ανεξάρτητες

ii) η $\{X(t): t \geq S_n\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμη με την $\{X(t): t \geq 0\}$

[Ανανεωτική: μετράμε #γεγονότων. Από γεγονός σε γεγονός μεσολαβούν ισόνομοι χρόνοι. Ενδιάμεσα, η $\{N(t)\}$ μένει σταθερή.

Αναγεννητική: Ενδιάμεσα συμβαίνουν διαφορετικά πράγματα. Έχει από κάτω της μια ανανεωτική σ.δ. (βλ. παράδειγμα αποθήκης - Μάθημα 17).

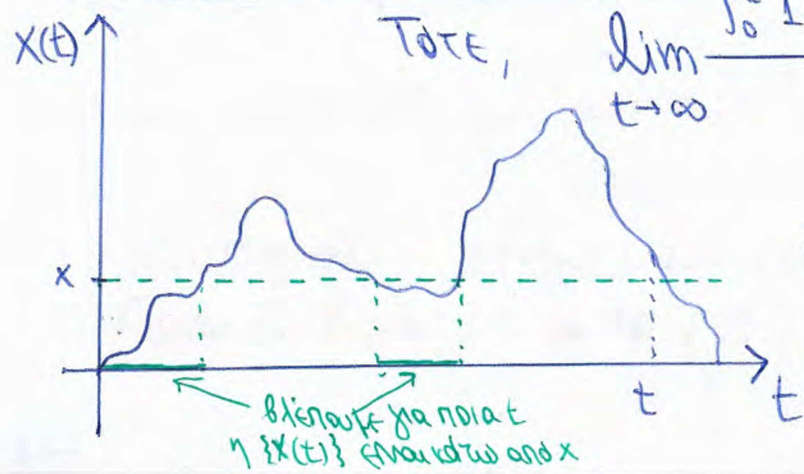


Ουσιαστικά, και στα μοντέλα με τις μηχανές που είχαμε δει αναγεννητικές μελετούσαμε. Οι ανανεωτικές αναφέρονταν απλώς στα σημεία reset-αθροίσματος $(O_n + D_n)$ · στο ενδιάμεσο έχουμε αναγεννητική (!)]

3) Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου στις διαφορετικές καταστάσεις

Ορισμός: Έστω $\{X(t)\}$ στοχαστική διαδικασία με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Τότε,
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}}\,du}{t} =$$
Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που η $\{X(t)\}$ είναι κάτω από x
(θυμίζει σ.κ. για κάθε x)



Οριακή δειγματική σ.κ. της $\{X(t)\}$:
$$\left(\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}}\,du}{t}, \ x \in \mathbb{R} \right)$$

Οριακή αναμενόμενη δειγματική σ.κ. της $\{X(t)\}$:

$$\left(\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}} du\right]}{t} : x\in\mathbb{R} \right).$$

[υπολογίζονται εύκολα σε αναγεννητικές διαδικασίες]

④ <u>Υπολογισμός των οριακών δειγματικών σ.κ. σε αναγεννητικές διαδικασίες</u>

<u>Θεώρημα</u> Αν $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία με 1° χρόνο αναγέννησης S_1, τότε

i) $$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}} du}{t} = \frac{E\left[\int_0^{S_1} 1_{\{X(u)\le x\}} du\right]}{E[S_1]}$$ με πιθ. 1

σύγκλιση τ.μ.

ii) $$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}} du\right]}{t} = \frac{E\left[\int_0^{S_1} 1_{\{X(u)\le x\}} du\right]}{E[S_1]}$$

σύγκλιση αριθμών

<u>Απόδειξη:</u> Άμεση εφαρμογή του ΣΑΘΚ στην $\{N(t)\}$ των χρόνων αναγέννησης της $\{X(t)\}$ με $C(t) = \int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}} du$ (δηλαδή κόστος με ρυθμό 1 για κάθε χρονική μονάδα που η $\{X(t)\}$ βρίσκεται σε κατάσταση $\le x$. ⌋

⑤ <u>Παρατήρηση: Οριακή σ.κ. της $\{X(t)\}$</u>

Οριακή σ.κ. της $\{X(t)\} = \left(\lim_{t\to\infty} Pr[X(t)\le x],\ x\in\mathbb{R} \right)$ [εδώ δηλαδή αφήνουμε να περάσει χρόνος, ώστε να ισορροπήσει το σύστημα, και κοιτάω εκεί τι γίνεται. Στις δειγματικές κοιτούσαμε σε όλον τον χρόνο τι συμβαίνει]

Αν υπάρχει η οριακή σ.κ. μιας αναγεννητικής διαδικασίας, τότε ισούται με την οριακή αναμενόμενη δειγματική σ.κ., δηλαδή $F_{X(\infty)}(x)=F_X(x)$, όπου $F_{X(\infty)}(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\Pr[X(t)\le x]$ και $F_X(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{E\left[\int_0^t 1\{X(u)\le x\}\,du\right]}{t}$.

<u>Απόδειξη:</u> $F_{X(\infty)}(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\Pr[X(t)\le x]$

$$F_X(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[\int_0^t 1\{X(u)\le x\}\,du\right]}{t}\ \underset{\text{αλλάζουμε μέση τιμή και ολοκλήρωμα}}{\overset{\text{Beppo-Levi}}{=\!=\!=}}\ \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t E\left[1\{X(u)\le x\}\right]du}{t}$$

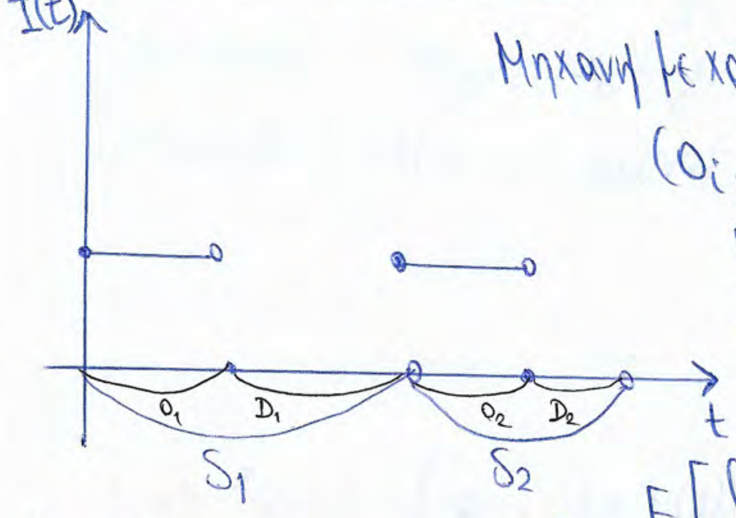
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t \Pr[X(u)\le x]\,du}{t}.$$

Τώρα, αυτό είναι το Cesaro όριο του $F_{X(\infty)}(x)$ και άρα $F_{X(\infty)}(x)=F_X(x)$ $\left[\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\ell \ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\ \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\int_0^t f(u)\,du}{t}=\ell\right]$.

(το αντίστροφο δεν ισχύει: πχ σε μία περιοδική $\nexists \lim\limits_{t\to\infty}f(t)$, αλλά το Cesaro όριο υπάρχει)

⑥ Εφαρμογή: Εναλλασσόμενη Ανανεωτική Διαδικασία

(το έχουμε ξαναδεί)



Μηχανή με χρόνους λειτουργίας O_i και αργίας D_i. (O_i,D_i), $i\ge 1$, ανεξάρτητες και ισόνομες με $E[O_i]=\mu_O$ και $E[D_i]=\mu_D<\infty$.

Έχουμε δει ότι $\underbrace{\lim\limits_{t\to\infty}\Pr[I(t)=1]}_{\text{οριακή πιθανότητα λειτουργίας}}=\dfrac{\mu_O}{\mu_O+\mu_D}$

Αν ενδιαφερόμαστε για το $\underbrace{\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{E\left[\int_0^t I(u)\,du\right]}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου λειτουργίας}}$, τότε, επειδή η $\{I(t)\}$

είναι αναγεννητική με σημεία αναγέννησης τις ενάρξεις λειτουργίας μηχανής,

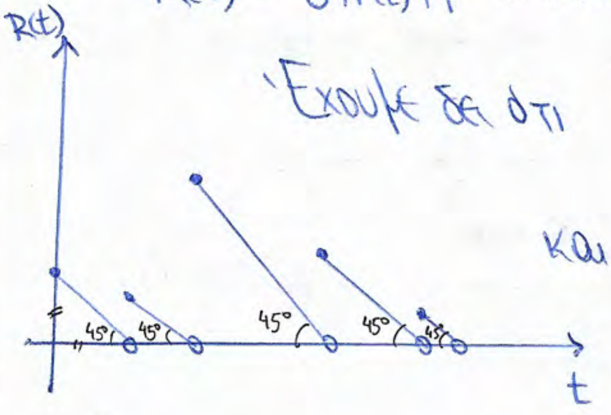
έχουμε $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[\int_0^t I(u)du\right]}{t} = \frac{E\left[\int_0^{S_1} I(u)du\right]}{E[S_1]} = \frac{E[O_1]}{E[O_1]+E[D_1]}$

[Το $\lim_{t\to\infty} Pr[I(t)=1]$, που είχαμε βρει με αρκετό κόπο, είναι πιο ισχυρό από το $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[\int_0^t I(u)du\right]}{t}$, γιατί το πρώτο μπορεί και να μην υπάρχει]

7 Υπολειπόμενος Χρόνος Ανανέωσης

Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$ και για τον ενδιάμεσο χρόνο X ισχύει $E[X]=\mu$ και $Var[X]=\sigma^2<\infty$.

$R(t) = S_{N(t)+1} - t$: υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t.



Έχουμε δε ότι $\displaystyle\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$ (ανανεωτικό παράδοξο: θα περιμέναμε $\frac{\mu}{2}$)

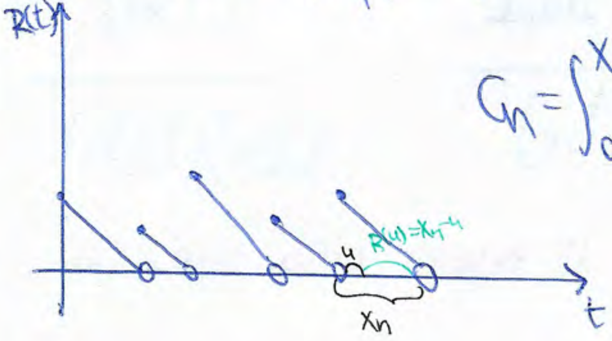
και $\displaystyle\lim_{t\to\infty} Pr[R(t)\le x] = \frac{\int_0^x (1-F_X(u))du}{\mu}$ ← οριακή σ.κ.

Χρειάστηκε αρκετή δουλειά για να τα βρούμε. Μπορούμε τώρα να τα βρούμε χρησιμοποιώντας τα δειγματικά τους ανάλογα και το ΣΑΘΚ. Αν ενδιαφερόμαστε για τα

(i) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t}$ και (ii) $\displaystyle F_R(x) = \lim_{t\to\infty}\frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}} du\right]}{t}$, $x\in\mathbb{R}$,

έχουμε εύκολους υπολογισμούς με ΣΑΘΚ (διαλέγοντας κάθε φορά κατάλληλη δομή κόστους):

(i) Θεωρούμε τη δομή κόστους $C(t)=\int_0^t R(u)\,du$. Θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι εφαρμόσιμο το ΣΑΘΚ. Μελετάμε τα C_n.



$$C_n=\int_0^{X_n}(X_n-u)\,du = X_n^2-\frac{X_n^2}{2}=\frac{X_n^2}{2}.$$ Άρα,

$$(X_n,C_n)=\left(X_n,\frac{X_n^2}{2}\right),\ n\geq 1 \rightsquigarrow \text{ανεξάρτητα και ισόνομα}$$

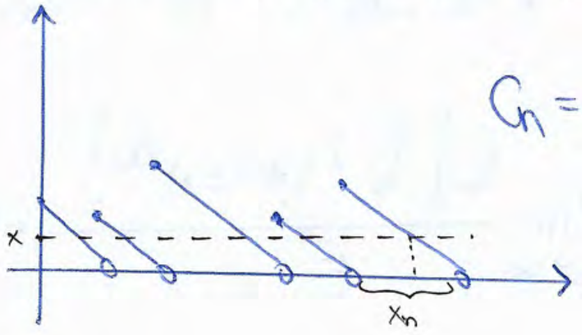
(αφού τα X_n είναι ανεξάρτητα και ισόνομα),

οπότε εφαρμόζεται το ΣΑΘΚ και παίρνουμε

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[\int_0^t R(u)\,du\right]}{t}=\frac{E\left[\int_0^{X_1} R(u)\,du\right]}{E[X_1]}=\frac{E\left[\frac{X_1^2}{2}\right]}{E[X_1]}=\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$$

(Βρήκαμε το ίδιο με το $\lim_{t\to\infty}E[R(t)]$, αλλά εδώ είναι λίγο ασθενέστερο: ΑΝ ξέρουμε ότι υπάρχει το $\lim_{t\to\infty}E[R(t)]$, τότε αρκεί να βρούμε με ΣΑΘΚ το $\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t}$ και να πούμε ότι είναι ίσα. Στην πράξη, συνήθως μας ενδιαφέρει περισσότερο το όριο $\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t}$, γιατί λαμβάνει υπ' όψιν όλα τα κόστη στην πορεία).

(ii) Θεωρούμε την $C(t)=\int_0^t 1\{R(u)\leq x\}\,du$. Τότε,



$$C_n=\int_0^{X_n}1\{R(u)\leq x\}\,du=\min(X_n,x),$$ άρα

$(X_n,C_n)=(X_n,\min(X_n,x)),\ n\geq 1$, ανεξάρτητες και ισόνομες, οπότε το ΣΑΘΚ είναι εφαρμόσιμο και παίρνουμε:

$$F_R(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}}\, du\right]}{t} = \frac{E\left[\int_0^{X_1} 1_{\{R(u)\le x\}}\, du\right]}{E[X_1]} =$$

$$= \frac{E\left[\min(X_1,x)\right]}{E[X_1]} \underset{\substack{E[Y]=\int_0^\infty (1-F_Y(x))dx \\ =\int_0^\infty Pr[Y>x]dx}}{\overset{\text{Αν } Y\ge 0, \text{ τότε}}{=}} \frac{\int_0^\infty Pr\left[\min(X_1,x)>u\right] du}{\mu} =$$

$$= \frac{\int_x^\infty \cancel{0}\, du + \int_0^x Pr\left[X_1>u\right] du}{\mu} = \frac{\int_0^x (1-F_X(u))\,du}{\mu}$$

["Συμπέρασμα": Το ΣΑΘΚ είναι ένα φοβερό εργαλείο, τόσο για εφαρμοσμένα προβλήματα (αποθήκες, μηχανές, κλπ) όσο και για θεωρητικά (υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης). Το μόνο ίσως "τίμημα" είναι ότι δίνει αποτελέσματα για τα Cesaro όρια.]

⇒ [ΤΟ ΣΑΘΚ ΘΑ ΜΠΕΙ. ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΕΡΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ !! [Θεμελιώδης ιδέα: κοιτάω γεγονότα με στοχαστική περιοδικότητα και περιορίζομαι σε έναν κύκλο]]

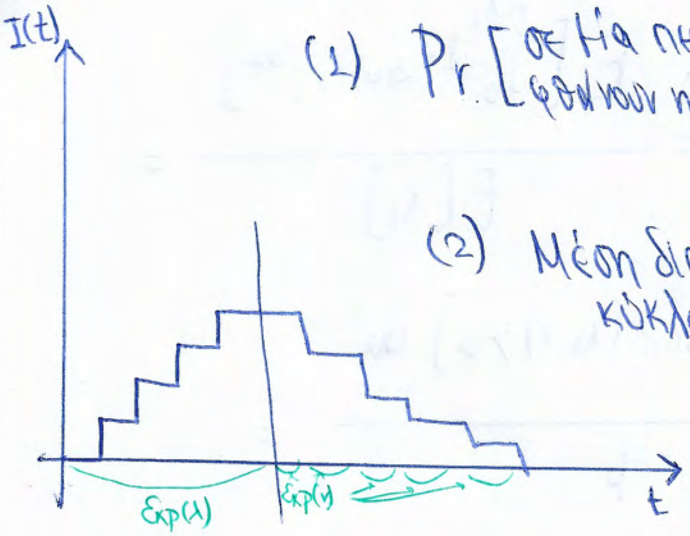
(8) Άσκηση: Θέμα 2 / 13/6/2016

Μηχανή επεξεργασίας προϊόντων. Περίοδος υποδοχής παραγγελιών ~ Exp(λ). Φθάνουν εργ. σύμφωνα με σ.δ. Poisson(μ), όχι επεξεργ.

Περίοδος διεκπεραίωσης, όχι νέες παραγγελίες. Χρόνοι εξυπηρέτησης ~ Exp(ν) για κάθε συσσωρευμένη παραγγελία.

Κόστη-Κέρδη: k: κέρδος/παραγγελία

h: κόστος/χρονική μονάδα διεκπεραίωσης



(1) $\Pr\left[\begin{matrix}\text{σε μία περίοδο παράδοσης} \\ \text{φθάνουν n παραγγελίες}\end{matrix}\right] \overset{\text{κοιτάμε την υπέρθεση}}{=} \left(\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \cdot \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

(2) Μέση διάρκεια κύκλου $= E\Big[\underset{\sim \mathcal{E}xp(\lambda)}{X} + \sum_{i=1}^{N(X)} \underset{\sim \mathcal{E}xp(\nu)}{Y_i}\Big] =$

$$= \frac{1}{\lambda} + \underbrace{\mu \cdot \frac{1}{\lambda}}_{\text{μέσος αριθμός προϊόντων}} \cdot \frac{1}{\nu}$$

(3) Μακροπρόθεσμο μέσο κέρδος ανά χρονική μονάδα $\overset{\text{ΣΑΘΚ}}{=} \dfrac{\overbrace{k \cdot \mu \cdot \frac{1}{\lambda}}^{\text{κέρδος}} - \underbrace{h \cdot \mu \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\nu}}_{\text{κόστος}}}{\underbrace{\frac{1}{\lambda} + \mu \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\nu}}_{\text{μήκος κύκλου}}}$