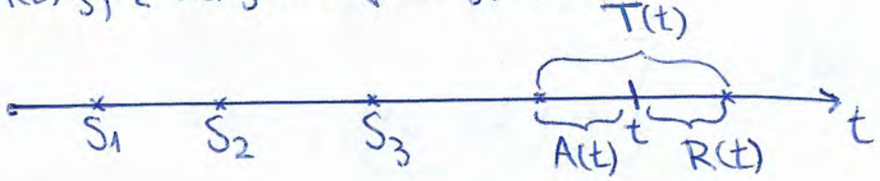
21/3/19 Μάθημα 8

Σ.μ.Ε.Ε.

Εφαρμογές Ανανεωτικών Εξισώσεων

① Ηλικία, υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης, ολικός (t-εξαρτημένος) χρόνος ανανέωσης

Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \dots \sim F_X(x)$ ← σ.κ., $f_X(x)$ σ.π.π. και $E[X_i] = \mu < \infty$, $Var[X] = \sigma^2 < \infty$. Από τη $\{N(t)\}$ φτιάχνουμε 3 άλλες διαδικασίες, τις $\{A(t)\}$, $\{R(t)\}$ και $\{T(t)\}$, όπου

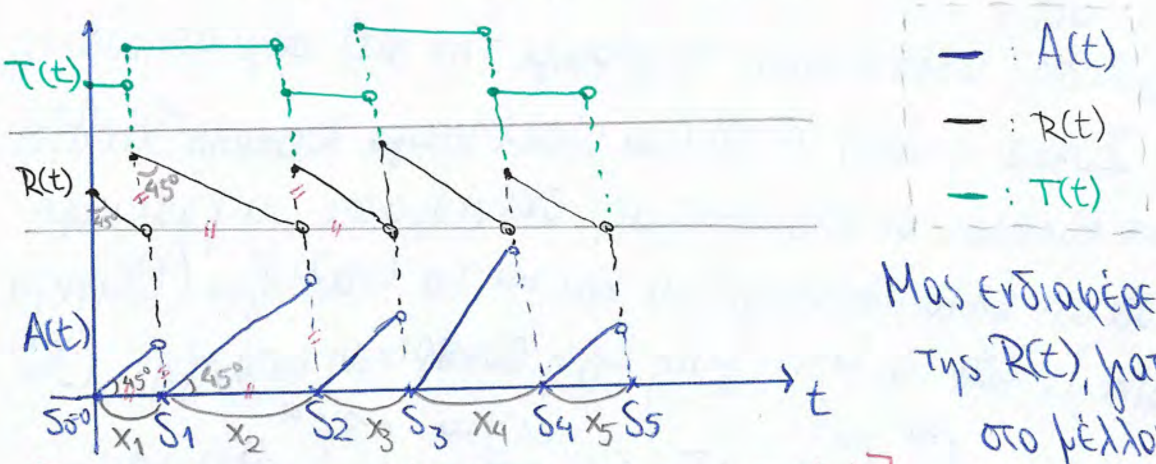


$A(t) = t - \underbrace{S_{N(t)}}$: ηλικία

από τη χρον. στιγμή που είμαι, δηλ. την t, αφαιρώ την χρον. στιγμή που έγινε το τελευταίο γεγονός, δηλ. την $S_{N(t)}$

, $R(t) = \underbrace{S_{N(t)+1}}_{\text{χρονική στιγμή επόμενου γεγονότος}} - \underbrace{t}_{\text{χρονική στιγμή που βρίσκομαι}}$: υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης

$T(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$: ολικός χρόνος ανανέωσης



[Τα τρίγωνα στα A(t), R(t) είναι ισοσκελή]

Μας ενδιαφέρει αρκετά η μελέτη της R(t), γιατί αυτή "κοιτάει στο μέλλον".

② Μελέτη του $E[R(t)]$

(Ερώτημα: αν ξέρω ότι κατά μέσο όρο περνάει λεωφορείο κάθε 10 λεπτά και φτάσω κάποια στιγμή, πόσο είναι πιθανότερο να περιμένω κατά μέσο όρο? ⇝ Σκεφτόμαστε 5 λεπτά ($\to \frac{\mu}{2}$, όπου μ: μέσος χρ. διέλευσης λεωφορείων) (αφού έχω πλήρη άγνοια, παίρνω τον μέσο χρόνο). Αυτό όμως είναι λάθος ⇝ ανανεωτικό παράδοξο!)

Θα μελετήσουμε την $E[R(t)]$ με τον γνωστό τρόπο:

- Ανανεωτική εξίσωση για το $h(t) = E[R(t)]$.
- $h(t) = E[R(t)] = ?$
- $\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} E[R(t)] = ?$

Δεσμεύουμε στον χρόνο $1^{ης}$ ανανέωσης:

$$h(t) = E[R(t)] = \int_0^\infty E[R(t) \mid S_1 = u]\, dF_X(u), \quad \text{όπου}$$

$$E[R(t) \mid S_1 = u] = \begin{cases} \overbrace{u-t}^{\text{αφού είμαι στην } t \text{ και το } 1^\text{ο} \text{ γίνεται στη } u\text{, μένει ακόμα } u-t}, & \underbrace{u>t}_{\text{"τη στιγμή που κοιτάζεις, δεν έχει γίνει το } 1^\text{ο} \text{ γεγονός"}} \\ \underbrace{E[R(t-u)]}_{h(t-u)}, & u \le t \end{cases}$$

Εδώ είπαμε στην κατηγορία περίπτωση όπου η $\{R(t)\}$ reset-άρει μετά από στιγμή ανανέωσης, άρα εμφανίζεται ξανά η h: $(R(t)|S_1=u) = R(t-u)$, σε αντίθεση με την $m_X(t)$: $(N(t)|S_1=u) = 1+N(t-u)$, γιατί στην τελευταία μας νοιάζει πόσα έγιναν πριν!

οπότε, κατά τα γνωστά τώρα, έχουμε την ανανεωτική εξίσωση:

$$h(t) = \underbrace{\int_t^\infty (u-t)\, dF_X(u)}_{d(t)} + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u).$$

Βρήκαμε μεν την ανανεωτική εξίσωση, αλλά θέλουμε να φέρουμε την $d(t)$ στην απλούστερη δυνατή μορφή. Συχνά, η $d(t)$ είναι ένα ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes. Για να γίνουν πιο εύκολοι οι υπολογισμοί, σκεφτόμαστε να γράψουμε τη συνάρτηση μέσα ως άλλο ολοκλήρωμα και να τα εναλλάξω (Θεώρημα Tonelli ή Fubini), ώστε να μείνει μόνη της η συνάρτηση κατανομής. Εδώ,

$$d(t) = \int_t^\infty (u-t)\, dF_X(u) = \int_t^\infty \int_t^u dy\, dF_X(u) \overset{t<y<u}{\underset{\text{εναλλαγή}}{=\!=}} \int_t^\infty \int_y^\infty dF_X(u)\, dy =$$

$= \int_t^{\infty} (1-F_X(y))\,dy$ [2 τα πλεονεκτήματα της τελευταίας γραφής:

- το ολοκλήρωμα ήταν Riemann-Stieltjes και έγινε απλώς Riemann
- το t στην αρχή $\int_{t}^{\infty}(u-t)\,dF_X(u)$ ήταν και στα όρια και μέσα $\rightsquigarrow$ δύσκολο

ενώ στο τέλος $\int_{t}^{\infty}(1-F_X(y))\,dy$ μόνο στα όρια]. Έχουμε, λοιπόν,

ότι:

$$h(t) = \underbrace{\int_t^{\infty} (1-F_X(y))\,dy}_{d(t)} + \int_0^t h(t-u)\,dF_X(u).$$

Η λύση είναι:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\,dm_X(u) \Rightarrow$$

$$h(t) = \int_t^{\infty}(1-F_X(y))\,dy + \int_0^t \int_{t-u}^{\infty} (1-F(y))\,dy\,dm_X(u)$$ $\rightsquigarrow$ όχι απλή μορφή (συνηθίζεται)

Το $\lim_{t\to\infty} h(t)$ μάς παραπέμπει κατευθείαν στο Β.Α.Θ.

Πρέπει πρώτα να ελέγξουμε τις προϋποθέσεις του:

- X (απόλυτα) συνεχής (έχει σ.π.π.) $\Rightarrow$ X απεριοδική
- $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, όπου $d_2(t) = 0$, $d_1(t) = \int_t^{\infty}(1-F_X(y))\,dy$,

  $d_2(t) \geq 0$ φθίνουσα και φραγμένη, $d_1(t) \geq 0$ φθίνουσα, άρα

  $\int_t^{\infty}(1-F_X(y))\,dy \leq \int_0^{\infty}(1-F_X(y))\,dy = E[X] = \mu < \infty$, οπότε $d_1(t)$ φραγμένη.

- $\int_0^{\infty} |d(t)|\,dt \overset{d(t)\geq 0}{=} \int_0^{\infty} d(t)\,dt = \int_0^{\infty}\int_t^{\infty}(1-F_X(y))\,dy\,dt$ $\underset{\text{εμφανιστεί το } dF_X(u), \text{ να πάρουμε κάποια ροπή και μετά ξέρουμε ότι η ροπή 2ης τάξης (Var) είναι } <\infty}{\overset{\text{τώρα πάμε ανάποδα: θέλουμε να το κάνουμε ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes, για να}}{=}}$

$= \int_0^{\infty}\int_t^{\infty}\int_y^{\infty} dF_X(u)\,dy\,dt \overset{0\leq t\leq y\leq u}{=}$

$$= \int_0^\infty \int_0^u \int_0^y dt\, dy\, dF_X(u) = \int_0^\infty \int_0^u y\, dy\, dF_X(u) = \int_0^\infty \frac{u^2}{2}\, dF_X(u) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^2\, dF_X(u) = \frac{1}{2} E[X^2] = \frac{1}{2}\left(Var[X] + (E[X])^2\right) = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2} < \infty,$$

άρα το ΒΑΘ είναι πράγματι εφαρμόσιμο και έχουμε:

$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{E[R(t)]}_{h(t)} = \frac{\int_0^\infty d(t)dt}{\mu} = \frac{\frac{\sigma^2+\mu^2}{2}}{\mu} = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}$$

Τελικά, $\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu} = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu} \geq \frac{\mu}{2}$ [αξίζει να

$\boxed{\text{Αναγεννητικό Παράδοξο}}$

συγκρίνουμε με το Ερώτημα στη σελ. 2 για τα λεωφορεία: εμείς αναμέναμε διαισθητικά να είναι $\frac{\mu}{2}$. Όμως πρέπει να σκεφτούμε το εξής: η μέση τιμή επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές, άρα αν μας πουν $\mu=10$, αυτό δε μας λέει ότι τα λεωφορεία περνάνε κάθε 10 λεπτά. Αν πχ σε 1 ώρα περνάνε 2 μαζί κάθε 20 λεπτά, τότε έχουμε 6 λεωφορεία σε 1 ώρα, άρα λέμε 1 ανά 10 λεπτά → ο χρόνος αναμονής μας όμως αλλάζει! Άρα πρέπει σίγουρα να εμπλακεί και η διασπορά:

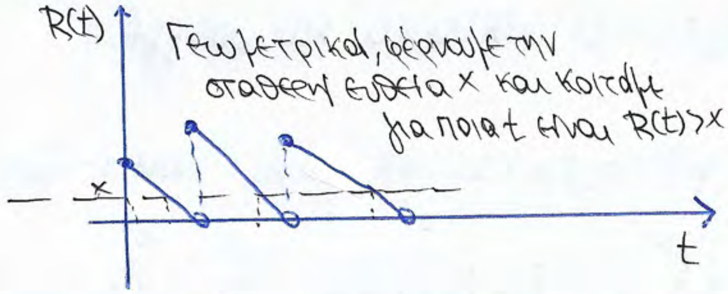
$$\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu} \geq \frac{\mu}{2}$$ με ισότητα ανν

$$\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \frac{\mu}{2} \Leftrightarrow \sigma = 0 \Rightarrow X_i = \mu$$ με πιθ. 1 (ντετερμινιστικό)]

③ Μελέτη της $Pr[R(t)>x]$ (για κάθε $x>0$ σταθερό)

("Αν κοιτάξω μια χρον. στιγμή t το σύστημα, ποια είναι η πιθ. να περιμένω πάνω από x για το επόμενο γεγονός?" $= Pr[R(t)>x]$)

- Αναγεννητική εξίσωση για την $p(t) = Pr[R(t)>x]$
- Τύπος για $h(t)$
- $\lim_{t\to\infty} h(t)$



Αναλυτικά, έχουμε όπως πάντα:

$$h(t) = Pr[R>t] \Rightarrow$$

$$h(t) = \int_0^\infty Pr[R(t)>x \mid S_1 = u]\, dF_X(u) \quad , \text{όπου}$$

$$Pr[R(t)>x \mid S_1 = u] = \begin{cases} Pr[\underbrace{u-t>x}_{\text{εδώ δεν υπάρχει τ.μ. άρα παίρνει τιμές 0 ή 1}}], & u>t \\ \overbrace{Pr[R(t-u)>x]}^{h(t-u)}, & u \leq t \end{cases} \Rightarrow$$

$$Pr[R(t)>x \mid S_1 = u] = \begin{cases} 1, & u-t>x,\ u>t \\ 0, & u-t \leq x,\ u>t \\ h(t-u), & u \leq t \end{cases}$$

, άρα σπάμε το ολοκλήρωμα στα $u>t+x$, $t<u\leq t+x$ και $u\leq t$ και έχουμε

$$h(t) = \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) + \cancelto{0}{\int_t^{t+x} 0\, dF_X(u)} + \int_{t+x}^\infty 1\, dF_X(u) \Rightarrow$$

$$h(t) = \underbrace{\int_{t+x}^\infty 1\, dF_X(u)}_{d(t)} + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)$$

, η ανανεωτική εξίσωση,

όπου $d(t) = \int_{t+x}^\infty 1\, dF_X(u) = 1 - F_X(t+x)$.

Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης είναι:

$$Pr[R(t)>x] = h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\, dm_X(u) \Rightarrow$$

$$Pr[R(t)>x] = 1 - F_X(t+x) + \int_0^t (1 - F_X(t-u+x))\, dm_X(u).$$

Μένει το $\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} Pr[R(t)>x]$, άρα σκεφτόμαστε ΒΑΘ.

Ελέγχουμε πρώτα τις προϋποθέσεις του:

- X απεριοδική
- $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, όπου $d_2(t)=0$ φθίνουσα και φραγμένη,

$d_1(t) = 1 - F_X(t+x) \geq 0$ φθίνουσα και φραγμένη (από $1-F_X(x)$)

- $$\int_0^\infty |d(t)|dt \overset{d(t)\geq 0}{=} \int_0^\infty d(t)dt = \int_0^\infty (1-F_X(t+x))dt \overset{y=t+x}{=} \int_x^\infty (1-F_X(y))dy \leq$$

$$\leq \int_0^\infty (1-F_X(y))dy = E[X] = \mu < \infty$$, άρα από ΒΑΘ παίρνουμε

$$\lim_{t\to\infty} Pr[R(t)>x] = \frac{\int_0^\infty d(t)dt}{\mu} = \frac{\int_x^\infty (1-F_X(y))dy}{\mu} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty} Pr[R(t)\leq x]}_{\text{οριακή σ.κ. της } R(t) \text{ στο } x} = 1 - \frac{\int_x^\infty (1-F_X(y))dy}{\mu} = \frac{\mu - \int_x^\infty (1-F_X(y))dy}{\mu} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty (1-F_X(y))dy - \int_x^\infty (1-F_X(y))dy}{\mu} = \frac{\int_0^x (1-F_X(y))dy}{\mu},$$

άρα οριακή σ.π.π. της $R(t)$ στο x $= \dfrac{1-F_X(x)}{\mu}$ ⇝ έχει όνομα:

Δοθείσης μιας τ.μ. X που παριστάνει τους ενδιάμεσους χρόνους μίας ανανεωτικής διαδικασίας με σ.κ. $F_X(x)$, ορίζεται μία τ.μ. X_e ← equilibrium (ισορροπία) που παριστάνει τον οριακό υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης, με σ.κ.

$$F_{X_e}(x) = \frac{\int_0^x (1-F_X(y))dy}{\mu}, \text{ όπου } \mu = E[X].$$

Η $F_{X_e}(x)$ λέγεται κατανομή ισορροπίας της F_X. [Διαισθητικά: Αν F_X η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μιας ανανεωτικής διαδικασίας, τότε F_{X_e} η κατανομή του χρόνου αναμονής ενός πελάτη μέχρι το επόμενο γεγονός, δηλαδή
F_X ⇝ "κάθε πότε περνάνε τα λεωφορεία"
F_{X_e} ⇝ "πόσο θα περιμένω μέχρι το επόμενο λεωφορείο"]

④ Χαρακτηριστικά των X και X_e

Αλγεβρική σύνδεση:

	X	X_e
σ.κ.	$F_X(x)$	$\dfrac{\int_0^x (1-F_X(y))\,dy}{\mu}$
σ.π.π.	$f_X(x)$	$\dfrac{1-F_X(x)}{\mu}$
μέση τιμή	$\mu = E[X]$	$\dfrac{\mu}{2} + \dfrac{\sigma^2}{2\mu} = \dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu} = E[X^2]$
μετασχ. L-S	$\tilde{F}_X(s)$	see below

$$\tilde{F}_{X_e}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dF_{X_e}(x) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\frac{1-F_X(x)}{\mu}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-sx}\int_x^\infty dF_X(u)\,dx \;\overset{0\le x\le u}{\underset{\text{εναλλαγή}}{=}}\; \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \int_0^u e^{-sx}\,dx\,dF_X(u)$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \frac{1-e^{-su}}{s}\,dF_X(u) = \frac{1}{\mu s}\cdot\left(1-\tilde{F}_X(s)\right)$$

Διαισθητική σύνδεση: $F_X \rightsquigarrow$ "κάθε πότε συμβαίνει ανανέωση"

$F_{X_e} \rightsquigarrow$ "πόσο θα περιμένω"

⑤ Ζεύγη X, X_e

θα το σκεφτόμαστε ως "κάθε πότε περνάνε τα λεωφορεία"

θα το σκεφτόμαστε ως "πόσο θα περιμένω κατά μέσο όρο"

X	X_e
$X = c$	Uniform($[0,c]$)
Exp(λ)	Exp(λ)
Erlang($2,\lambda$)	$X_e = \begin{cases} \text{Exp}(\lambda), & \text{με πιθ. } \frac{1}{2} \\ \text{Erlang}(2,\lambda), & \text{με πιθ. } \frac{1}{2} \end{cases}$

Πολύ έντονο εδώ το ανανεωτικό παράδοξο: "Αν τα λεωφορεία περνάνε κάθε 10' κατά μέσο όρο, θα περιμένω 10' κατά μέσο όρο" (και όχι 5', όπως σκεφτόμαστε)