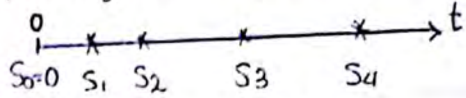
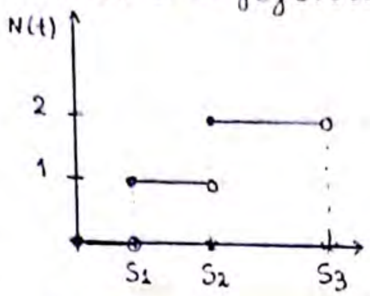
Ανανεωτική Θεωρία

① Ορισμός: $0 \overset{S_0}{=} \leq S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots$ τ.μ. λεγεται σημειακή διαδικασια
(S_n: χρονος n-στου γεγονότος)



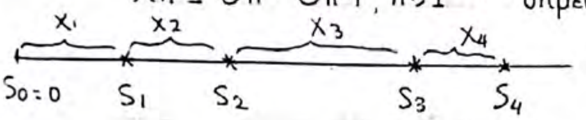
$N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0,t] = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$.



$\{N(t)|t \geq 0\}$ απαριθμήτρια στοχ. διαδικασια
S_n στοχ. διαδικασία διακριτού χρόνου, συνεχούς χώρου
$N(t)$ στοχ. διαδικασια συνεχούς χρόνου, διακριτού χώρου

Βασική σύνδεση: $\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$

Ορισμός: $\left.\begin{array}{l} X_1 = S_1 \\ X_n = S_n - S_{n-1},\ n \geq 1 \end{array}\right\}$ Ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων σημειακής διαδικασιας.



$\{S_n : n \geq 1\}$ ανανεωτική ακολουθια $\Leftrightarrow$ $\{X_n : n \geq 1\}$ ανεξ. ισον. με σκ. $F_X(t)$, συνηθως
X_n συνεχής τμ με σππ $f_X(t)$
$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασια $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ αναν. ακολουθια $\Leftrightarrow$ $\{X_n\}$ ανεξ. ισον.

② Βασικές ποσότητες για πεπερασμένο $t \geq 0$.
$F_{S_n}(t) = P_r[S_n \leq t]$, $n \geq 1$
$P_n(t) = P_r[N(t) = n]$, $n \geq 0$
$m(t) = E[N(t)]$

③ Συνελίξεις
X, Y τμ με σκ $F_X(t)$, $F_Y(t)$ τότε με $(F_X * F_Y)(t)$ συμβολίζεται η σκ $F_{X+Y}(t)$:

$$F_X * F_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t-u)\, dF_Y(u)$$

(Εμείς χρησιμοποιούμε Riemann-Stieltjes)

(Προσοχή! Συνήθως στις βασικές πιθανότητες χρησιμοποιείται συνέλιξη πυκνοτήτων $\int f_X(t-u) f_Y(u) du$)

④ Βασικοί υπολογισμοί για πεπερ. $t \geq 0$

Είναι $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$

$\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$

$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\{S_n \leq t\}$

Άρα • $F_{S_n}(t) = P_r[S_n \leq t] = P_r\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\right] = (\underbrace{F_X * F_X * \dots * F_X}_{n \text{ φορές}})(t)$

$= F_X^{(*n)}(t)$ (συνέλιξη n φορές με τον εαυτό της)

• $P_0(t) = P_r[N(t)=0] = P_r[S_1 > t] = 1 - P_r[S_1 \leq t] = 1 - F_X(t)$

για $n \geq 1$: $P_n(t) = P_r[N(t) = n] = P_r[S_n \leq t < S_{n+1}] = P_r[\{S_n \leq t\} \cap \{S_{n+1} \leq t\}^c]$

(όμως $\{S_{n+1} \leq t\} \subseteq \{S_n \leq t\}$) $= P_r[S_n \leq t] - P_r[S_{n+1} \leq t] = F_X^{(*n)}(t) - F_X^{(*n+1)}(t), n \geq$

Η ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$:

• $m(t) = E[N(t)] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1\{S_n \leq t\}\right] \underset{\text{Levi}}{\overset{\text{Beppo}}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} E[1\{S_n \leq t\}] = \sum_{n=1}^{\infty} P_r[S_n \leq t]$

$= \sum_{n=1}^{\infty} F_X^{*n}(t)$

⑤ Μετασχηματισμοί L-S Βασικών ποσοτήτων

$$\left.\begin{aligned} \tilde{F}_{S_n}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dF_{S_n}(t) \\ \tilde{P}_n(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dP_n(t) \\ \tilde{m}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t) \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \left\{\begin{aligned} \tilde{F}_{S_n}(s) &= (\tilde{F}_X(s))^n, \ n \geq 1 \\ \tilde{P}_n(s) &= (\tilde{F}_X(s))^n - (\tilde{F}_X(s))^{n+1}, \ n \geq 0 \\ \tilde{m}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{F}_X(s))^n = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)} \end{aligned}\right.$$

⑥ Μέθοδοι προσδιορισμού βασικών ποσοτήτων

1) Ανανεωτική συνάρτηση

1η Μέθοδος: Μέσω μετασχ L-S

$F_X(t) \xrightarrow[\text{εύκολο ολοκλήρωμα}]{} \tilde{F}_X(s) \xrightarrow[\text{εύκολο από τύπο}]{} \tilde{m}_X(s) \xrightarrow[\text{δύσκολο}]{} m_X(t)$

2η Μέθοδος: Μέσω Βασικού τύπου

$F_X(t) \rightarrow F_X^{*n}(t) \rightarrow m_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_X^{*n}(t)$

3η Μέθοδος: Μέσω ανανεωτικής εξίσωσης

$m_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_X^{*n}(t) = F_X(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_X^{*n}(t) \overset{k=n-1}{=\!=} F_X(t) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t)\right) * F_X(t)$

$= F_X(t) + F_X * m_X(t)$ ανανεωτική εξίσωση

$\Longleftrightarrow m_X(t) = F_X(t) + \int_0^t F_X(t-u)\,dm_X(u)$

Μετατρεπω την $\uparrow$ σε διαφορική και τη λύνω.

2) και 3) $F_{S_n(t)}$ και $P_n(t)$

1η και 2η μέθοδος μόνο.

⑦ Παράδειγμα: Η Poisson αναν. διαδικασία

$\{N(t)\}$ Poisson αν. διαδ. με ρυθμό $\lambda \Longleftrightarrow X_n \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ ανεξ

$m_X(t) = ;$

ΚΑΛΗ

1η μεθ: $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

$$\rightarrow \tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \Rightarrow \tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}$$

$\Longrightarrow m_X(t) = \lambda t$.

ΔΥΣΚΟΛΗ

2η μεθ: $F_X^{*n}(t)$ είναι η σκ αθροίσματος n ανεξ εκθετικών λ

άρα σκ Erlang(n, λ)

$$F_X^{*}(t) = \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u}\,du = \ldots = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} =$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \Longrightarrow m_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_X^{*n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{n=1}^{k}}_{=k}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,P_r[\underset{\text{Poisson}(\lambda t)}{N} = k] = E[N] = \lambda t$$

ΔΥΣΚΟΛΗ

3η μεθ: $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

$m_X(t) = F_X(t) + (F_X * m_X)(t) \Longrightarrow$

$m_X(t) = 1 - e^{-\lambda t} + \int_0^t (1 - e^{\lambda(t-u)})\, m_X'(u)\,du \longrightarrow \ldots$

⑧ ~~Εξα~~ Παράδειγμα: Ενδιάμεσοι χρόνοι μίξη $\mathcal{E}xp$

Ο n-στός ενδιάμεσος χρόνος

$$X_n = \begin{cases} \mathcal{E}xp(\lambda) & \text{με πιθ } p \\ \mathcal{E}xp(\mu) & \text{με πιθ. } 1-p \end{cases}, \quad \lambda \neq \mu$$

$\underset{\sim}{1}\eta$ μεθ. $F_X(t) = p(1-e^{-\lambda t}) + (1-p)(1-e^{-\mu t})$, $t \geq 0 \Rightarrow$

$\tilde{F}_X(s) = p\dfrac{\lambda}{\lambda+s} + (1-p)\dfrac{\mu}{\mu+s} \Rightarrow$

$$\tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \frac{\frac{p\lambda}{\lambda+s} + \frac{(1-p)\mu}{\mu+s}}{1 - \frac{p\lambda}{\lambda+s} - \frac{(1-p)\mu}{\mu+s}} = \frac{p\lambda(\mu+s) + (1-p)\mu(\lambda+s)}{(\lambda+s)(\mu+s) - p\lambda(\mu+s) - (1-p)\mu(\lambda+s)}$$

$$= \frac{\lambda\mu + [p\lambda + (1-p)\mu]s}{s^2 + \lambda s + \mu s + \lambda\mu - \lambda\mu - p\lambda s - (1-p)\mu s} = \frac{\lambda\mu + [\lambda p + \mu(1-p)]s}{s[s+\lambda(1-p)+\mu p]} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\lambda(1-p)+\mu p} \quad (1)$$

A: $(1) \cdot s$ και $s=0$ $\leadsto$ $A = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda(1-p)+\mu p}$

B: $(1) \cdot (s+\lambda(1-p)+\mu p)$ και $s = (p-1)\lambda - p\mu$ $\leadsto \ldots$ $B = \dfrac{-\lambda\mu + (\lambda p + \mu(1-p))(\lambda(1-p)+\mu p)}{\lambda(1-p)+\mu p}$

$$\Rightarrow \tilde{m}_X(s) = A \cdot \frac{1}{s} + \frac{B}{\lambda(1-p)+\mu p} \cdot \frac{\lambda(1-p)+\mu p}{s+\lambda(1-p)+\mu p}$$

$$\Rightarrow m_X(t) = At + \frac{B}{\lambda(1-p)+\mu p}\left(1 - e^{-[\lambda(1-p)+\mu p]t}\right)$$