Μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes

① Ολοκλήρωμα Riemann - Stieltjes

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $a = t_0 \le t_1 \le t_2 \dots \le t_n = b$ διαμέριση του $[a,b]$

$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{\sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\,(t_i - t_{i-1})\}$ κάτω Riemann ολ/μα

ομοίως

$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{\sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\,(t_i - t_{i-1})\}$ άνω Riemann ολ/μα

Όταν $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ f R-ολ/μη με R-ολ/μα τον κοινό αριθμό

A

Αν $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση και $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ τότε

κάτω ολ/μα Riemann-Stieltjes: $\underline{\int_a^b} f(x)d\varphi(x) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))\}$

ως προς φ

Ομοίως το άνω ολ/μα R-S: $\overline{\int_a^b} f(x)d\varphi(x) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))\}$

② Βασικό υπολογιστικό αποτέλεσμα.

Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα κατά τμήματα δεξιά συνεχής και παρ/μη σε κάθε διάστημα συνέχειας. Τότε η f είναι R-S ολ/μη ως προς την φ και

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \sum_{\substack{x \text{ σημείο} \\ \text{ασυνέχειας της } \varphi}} f(x)(\varphi(x) - \varphi(x-)) + \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx.$$

③ Μέση Τιμή τμ ως ολοκ. R-S ως προς τη συνάρτηση κατανομής.

X τμ. διακριτή ή (απόλυτα) συνεχής ή μεικτή με σπ $P_r[X=x] = p_X(x)$ και/ή σππ $f_X(x)$ και σκ $F_X(x)$ τότε:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_X(x) \quad , \; g \text{ συνεχής}$$

Πράγματι, αν X διακριτή $E[g(x)] = \sum_{\substack{x \text{ σημ. ασ.} \\ \text{της } F_X}} g(x)\cdot \overbrace{P_r[X=x]}^{F_X(x) - F_X(x-) = p_X(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF_X(x)$

Αν X συνεχής $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) F_X'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x)$

④ Μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes

Αν φ αύξουσα: $\int_0^{\infty} e^{-sx} d\varphi(x) = \tilde{\varphi}(s)$

Αν φ παρ/μη α, $\varphi: [0,\infty) \to \mathbb{R}$: $\int_0^{\infty} e^{-sx} d\varphi(x) = \overbrace{\int_0^{\infty} e^{-sx} \varphi'(x) dx}^{\text{Μετ. Laplace της } \varphi'} = \tilde{\varphi}(s)$

⑤ Μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes Τυχαίας - Μεταβλητής

$X \geq 0$ τμ με σκ $F_X(x) = P_r[X \leq x]$ τότε ο μετ. Laplace - Stieltjes της X είναι $\tilde{F}_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_X(x) = E[e^{-sX}]$

⑥ Σχέση Μετασχ. L-S με άλλα χαρακτηριστικά της τμ.

1) Αν η X έχει ροπογεννήτρια $M_X(t) = E[e^{tX}]$ τότε $\tilde{F}_X(s) = M_X(-s)$

2) Αν η X έχει πιθανογεννήτρια $P_X(z) = E[z^X]$ τότε $\tilde{F}_X(s) = P_X(e^{-s})$

3) Αν η $X \geq 0$ συνεχής $\tilde{F}_X(s) = \mathcal{L}\{f_X\}(s)$ μετ. Laplace της σππ της X

⑦ Ιδιότητες

1) $\tilde{F}_X(0) = 1$., $\tilde{F}_X(s)$ συγκλίνει τουλάχιστον στο $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq 0\}$

2) X, Y ισόνομες $\Leftrightarrow$ $\tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_Y(s)$

3) $E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0)$.

↳ απόδ: $E[e^{-sX}] = \tilde{F}_X(s) \xRightarrow{d^n/ds^n} E[(-X)^n e^{-sX}] = \tilde{F}_X^{(n)}(s) \xRightarrow{s=0}$
$(-1)^n E[X^n] = \tilde{F}_X^{(n)}(0)$

4) $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ., $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \tilde{F}_{S_n}(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s) \cdot \ldots \cdot \tilde{F}_{X_n}(s)$

↳ απόδ: $\tilde{F}_{S_n}(s) = E[e^{-sS_n}] \stackrel{1=1}{=} E[e^{-sX_1} e^{-sX_2} \dots e^{-sX_n}] \stackrel{\text{ανεξ.}}{=} E[e^{-sX_1}] \dots E[e^{-sX_n}]$
$= \tilde{F}_{X_1}(s) \dots \tilde{F}_{X_n}(s)$

5) $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. ισον. με $\tilde{F}_{X_i}(s) = \tilde{F}_X(s)$, N ακέραιο ≥ 0 με ~~[illegible]~~
$P_N(z) = E[z^N]$, $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$

↳ απόδ: $\tilde{F}_{S_N}(s) = E[e^{-s\sum X_i}] = \sum_{n=0}^{\infty} P_r[N=n] E[e^{-s\sum^{n} X_i} | N=n]$
$= P_N(\tilde{F}_X(s))$

Scanned by CamScanner

⑧ Βασικά ζεύγη μετ. Laplace-Stieltjes και συναρτήσεων

X τμ	$\varphi(x) = F_X(x)$	$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{F}_X(s)$
$X = 0 \,/\, c \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} 1, & x \geq 0 \,(/c) \\ 0, & x < 0 \,(/c) \end{cases}$	$1 \;(e^{-cs})$
$X \sim Exp(\lambda)$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\frac{\lambda}{\lambda+s}$
$X \sim Erlang(n,\lambda)$	$1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$
$Z = X + Y$	$F_Z(x) = \int_0^\infty F_X(x-y)\, dF_Y(y)$	$\tilde{F}_{X+Y}(s) = \tilde{F}_X(s)\tilde{F}_Y(s)$
$Z = \begin{cases} X & \pi\iota\theta\ p \\ Y & \pi\iota\theta\ 1-p \end{cases}$	$F_Z(x) = pF_X(x) + (1-p)F_Y(x)$	$\tilde{F}_{Z(x)}(s) = p\tilde{F}_X(s) + (1-p)\tilde{F}_Y(s)$
	$\varphi(x) = x$	$1/s$

⑨ Αντιστροφή ρητών μετασχ. L-S.

Ίδια διαδικασία με πιθανογεν.

πχ. $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\mu)$ ανεξ. $Z = X + Y$, $F_Z(x) = ;$ $f_Z(x) = ;$

$X \sim Exp(\lambda) \Longrightarrow \tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$, $Y \sim Exp(\mu) \Rightarrow \tilde{F}_Y(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$

$$\Longrightarrow \tilde{F}_{X+Y}(s) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+s)(\mu+s)} = \frac{A}{\lambda+s} + \frac{B}{\mu+s} \quad (1)$$

$(1)\cdot(\lambda+s)$ και $s = -\lambda$: $A = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}$

$(1)\cdot(\mu+s)$ και $s = -\mu$: $B = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$. Άρα

$$F_{X+Y}(s) = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s} + \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\cdot\frac{\mu}{\mu+s}$$

Άρα $F_{X+Y}(s) = \frac{\mu}{\mu-\lambda}(1 - e^{-\lambda x}) + \frac{\lambda}{\lambda-\mu}(1 - e^{-\mu x})$

(10) "Γεωμετρικό" άθροισμα ανεξ. ισον. εκθετικών.

~~Exp~~

$X_1, X_2, \ldots \sim Exp(\lambda)$ ανεξ.

$Pr[N=n] = (1-p)^{n-1} p, \ n \geq 1$. N ανεξ των X_i

$F_{S_N}(x) = ;$ όπου $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$. Όμως $\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$.

$$\tilde{P}_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Pr[N=n] z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p z^n = pz \sum_{n=1}^{\infty} [(1-p)z]^{n-1} =$$

$$pz \cdot \frac{1}{1-(1-p)^z}$$

Άρα $\tilde{F}_{S_N}(s) = \dfrac{p \cdot \frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-(1-p)\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \dfrac{\lambda p}{\lambda+s-(1-p)\lambda} = \dfrac{\lambda p}{\lambda p + s} \Rightarrow S_N \sim Exp(\lambda p)$

Δηλ. $F_{S_N}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda p x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$