① Πηγες: E-class
Σημειώσεις παραδόσεων
Σημειωσεις Latex
Ασκησεις
Βιβλίο Φακινου

Βιντεοδιαλεξεις (hve.uoa.gr
rec.uoa.gr)

Ωρες γραφείου Δ-Πε: 1-2 ή e-mail:
aeconom@math.uoa.gr

Περιεχομενο:

- Επισκόπιση πιθανοτητων (δεσμευμένη μέση τιμή, πιθανογεννήτριες, ροπογεννήτριες, μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes, Εκθετική κατανομή)
- Ανανεωτικές διαδικασίες
- Διαδικασια Poisson
- Ουρές αναμονής
- Θεωρία Ελέγχου αποθεμάτων

② Δεσμευμένη ση και σηπ

(X, Y) τμ.

(X, Y) διακριτη

$f_{X,Y}(x;y) = P_r[X=x;\, Y=y]$ από κοινού σπ

$f_{X|Y}(x|y) = P_r[X=x \mid Y=y]$ δεσμ. σπ της X δοθέντος ότι $Y=y$

$\sum_x f_{X|Y}(x|y) = 1$, $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$

(X, Y) συνεχής

$$f_{X,Y}(x,y) = \lim_{\delta x,\delta y \to 0^+} \frac{P_r[x < X \leq x+\delta x,\ y < Y \leq y+\delta y]}{\delta x \delta y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \underbrace{F_{X,Y}(x,y)}_{P_r[X\leq x,\ Y\leq y]}$$ από κοινου σηπ

$$f_{X|Y} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1, \quad f_{X|Y}(x|y) \geq 0$$

③ Δεσμευμένη Μέση Τιμή

$$E[X|A] = \frac{E[X 1_A]}{P_r[A]}$$

τμ. ↗ ↖ ενδεχομενο

αριθμοι

Δεσμευμένη μ.τ. της X δεδομενου του A

$E[X|Y=y]$ · Δεσμευμένη μ.τ. της X δεδομενου $Y=y$.

$m_{X|Y}(y)$ → καλυτερη εκτίμηση της X δεδ. οτι $Y=y$.

↳ συνάρτηση του y.

$$E[X|Y=y] = \begin{cases} \sum_x x f_{X|Y}(x,y) & \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx & \text{συνεχής} \end{cases}$$

πράγματι:

$$E[X|Y=y] = \frac{E[X 1_{\{Y=y\}}]}{P_r[Y=y]} = \left[\sum_x \sum_{y'} x\, 1\{y'=y\} f_{X,Y}(x,y')\right] \frac{1}{f_Y(y)}$$

$$= \sum_x x f_{X,Y}(x,y) \cdot \frac{1}{f_Y(y)} = \sum_x x f_{X|Y}(x|y)$$

Τυχαία μεταβ. ← $E[X|Y]$: δεσμευμένη μτ της X δοθείσης της Y

$m_{X|Y}(Y)$ → καλύτερη συνάρτηση της Y που προβλέπει την X

④ Θεώρημα Δέσμευσης Μέσης Τιμής

+ Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής (ΘΔΜΤ)

~~Θεώ~~ ΘΟΠ: $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ διαμέριση του Ω. A ενδεχόμενο

$$P_r[A] = \sum_{n=1}^{\infty} P_r[B_n] P_r[A|B_n]$$

ΘΔΜΤ: $$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P_r[B_n] E[X|B_n]$$

αποδ: $$\sum_{n=1}^{\infty} P_r[B_n] E[X|B_n] = \sum_{n=1}^{\infty} P_r[B_n] \cdot \frac{E[X 1_{B_n}]}{P_r[B_n]} = \sum_{n=1}^{\infty} E[X 1_{B_n}] \overset{\text{γραμμ.}}{=}$$

$$= E[X \sum_n 1_{B_n}] = E[X].$$

$$E[X] = E[\overbrace{E[X|Y]}^{m_{X|Y}(Y)}] = \begin{cases} \sum_y \Pr[Y=y]E[X|Y=y], & Y \text{ διακ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) E[X|Y=y]dy, & Y \text{ συν.} \end{cases}$$

Για Y διακριτή με δυνατές τιμές $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ είναι $B_n = \{Y = y_n\}$

⑤ Παραδείγματα

1) Ριψη νομισματος μεχρι "Κ" → επιτυχια με πιθ. p

X = #ριψεων ως την 1η "Κ" $E[X] = ;$

1ος. $\Pr[X=n] = (1-p)^{n-1}p, \ n \geq 1$

$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p = \ldots$

πολλή δουλειά ενώ ζητάμε κάτι απλό!

2ος. B_1 = ηρθε "Κ" B_2 = Δεν ηρθε "Κ"

$$E[X] = \underbrace{\Pr[B_1]}_{p} \underbrace{E[X|B_1]}_{1} + \underbrace{\Pr[B_2]}_{1-p} \underbrace{E[X|B_2]}_{(1+E[X])} \Rightarrow$$

$$E[X] = p + (1-p)(1+E[X]) \Rightarrow E[X] = \frac{1}{p}.$$

2) $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. ισον. με $E[X_i] = \mu_X$, $Var[X_i] = \sigma^2_X$.

N ανεξ. των X_i, ακερ ≥ 0 με $E[N] = \mu_N$ $Var[N] = \sigma^2_N$.

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ $E[S_N] = ;$ $Var[S_N] = ;$

$$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N=n] E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N=n] \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \mu_X \sum_{n=0}^{\infty} n \Pr[N=n] = \mu_X \mu_N \quad (1)$$

$$Var[S_n] = E[S_N^2] - (E[S_n])^2 \quad (2)$$

$$E[S_n^2] = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N=n] E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2 | N=n\right] = \sum_{n=0} \Pr[N=n] E[(\Sigma X_i)^2] \quad (3)$$

$$E[(\Sigma X_i)^2] = n \underbrace{E[X_i^2]}_{\sigma^2_X + \mu^2_X} + (n^2 - n) \underbrace{E[X_i X_j]}_{\mu_X^2}, \ i \neq j$$

$$= n\sigma^2_X + n^2 \mu_X^2 \quad (4).$$

Άρα $Var[S_n] \overset{(2)}{=} E[S_n^2] - (E[S_n])^2 = \sum \Pr[N=n](n\sigma^2_X + n^2\mu_X^2) - \mu_N^2 \mu_X^2$

$$= \mu_N \sigma_x^2 + \mu_x^2 \big(\underbrace{E[N^2] - \mu_N^2}_{\sigma_N^2} \big) = \mu_N \sigma_x^2 + \sigma_N^2 \mu_x^2$$

3) Στ. Αν θεμα 1 2020:

$$\mu_{n+1} = E[X_{n+1}] = E\Big[\sum_{i=1}^{X_n} Y_{n,i}\Big] = \sum_{j=0}^{\infty} P_r[X_n = j]\, E\Big[\sum_{i=1}^{X_n} Y_{n,i} \mid X_n = j\Big]$$

$$= \mu_Y E[X_n] = \mu_Y \mu_N.$$

$$\mu_n = \mu_N^n$$