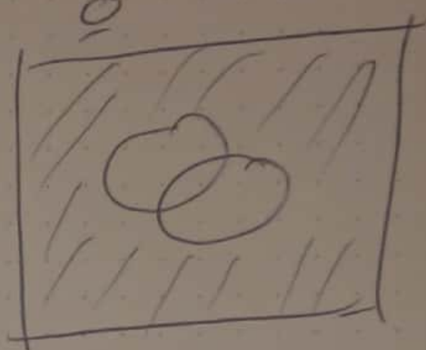
Άσκηση

Αν $A, B \subseteq \Omega$ με $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Ποια η πιθανότητα να μην συμβεί κανένα από τα A, B;

Λύση



$$P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= \frac{1}{4}$$

Άσκηση

$A, B \subseteq \Omega$

$P(A) = 0.3 \quad P(B) = 0.4$

$P(A \cap B) = 0.2$

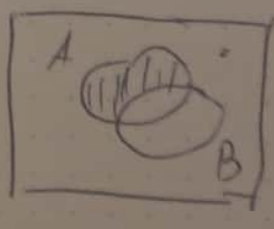
$P(\Omega) = 1$

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ αν $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

i) $P(A \setminus B) = ;$

ii) $P($ακριβώς ένα από τα A, B συμβαίνει$) = ;$

Λύση



i) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
$= 0.3 - 0.2 = 0.1$

ii) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 - 2 \cdot 0.2$
$= 0.3$

Άσκηση: Το πρόβλημα των γενεθλίων

Σε ένα σύνολο κ ατόμων, $\kappa \leq 365$, ποια η πιθανότητα τουλάχιστον δύο άτομα να έχουν ίδια ημερομηνία γέννησης.

λύση

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_\kappa) : x_i \in \{1, 2, \ldots, 365\}\}$$

$$|\Omega| = (365)^\kappa$$

$A =$ τουλάχιστον δύο άτομα έχουν ίδια ημ. γέννησης

$365 \cdot 364 \cdots (365-\kappa+1)$

$$p_\kappa = P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(365)_\kappa}{(365)^\kappa}$$

κ	5	10	20	23	30	40
p_κ	2.7%	11.7%	41.1%	50.7%	70.6%	89.1%

0.027

60
99.4%

A

Άσκηση 1.34 Ρίχνουμε ένα ζάρι 4 φορές

Να βρεθούν οι πιθανότητες

α) Να εμφανιστεί το 6 ~~τουλάχιστον~~ = τουλάχιστον δύο φορές

β) Να εμφανιστεί το 6 τουλάχιστον 2 φορές και το 1 καμία

λύση | $\Omega = \{(x_1, \dots, x_4) : x_i \in \{1..6\}\}$

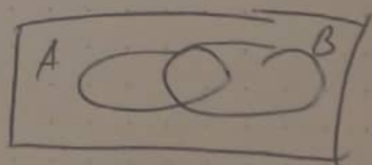
α) N = αριθμός εμφανίσεων του 6.

$P(\text{τουλ. δύο φορές}) = 1 - P(\text{το πολύ μια φορά})$

$= 1 - P(N=0) - P(N=1)$

$= 1 - \frac{5^4}{6^4} - \frac{4 \cdot 5^{4-1}}{6^4}$

$\frac{4}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{6}{}$ $\frac{1}{}$ $\frac{3}{4}$



β) A = τουλ. δύο φορές το 6

B = καμία φορά το 1 $A \setminus B$

$P(A \cap B) = \cancel{P(A) - P(A \cap B^c)}$

$= P(B) - P(B \cap A^c) = \frac{5^4}{6^4} - P(B \cap \{N=0\})$

$- P(B \cap \{N=1\}) = \frac{5^4}{6^4} - \frac{4^4}{6^4} - \frac{4 \, 4^{4-1}}{6^4}$

Κεφάλαιο 5 (Κοντογιάννη-Τωμπή)

Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξαρτησία

Ω δειγμ. χώρος

$B \subset \Omega$ με $P(B) > 0$ $\qquad A|B$

Για κάθε $A \subset \Omega$ ορίζουμε $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

λέγεται η δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B.

παράδειγμα: κάλπη έχει 5 άσπρες, 5 μαύρες, και 10 κόκκινες σφαίρες. Επιλέγουμε μία στην τύχη

A = επιλ. άσπρη, B = όχι κόκκινη $\quad | \; P(A) = \dfrac{5}{20}$

$$P(A|B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Ο ορισμός δίνει $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{5}{20}}{\frac{10}{20}} = \dfrac{5}{10}$

Σημασία της $P(A|B)$

1. Υποκειμενική ερμηνεία: ο βαθμός πεποίθησης που έχουμε ότι θα συμβεί το A ξέροντας ότι έχει συμβεί το B
2. Συχνοτική ερμηνεία. Κάνουμε το πείραμα N φορές. ~~PO~~ N_A πλήθος φορών από τις N που συμβαίνει το A.

$$P(A) \approx \frac{N_A}{N} \qquad P(A|B) = \;;$$

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{\frac{N_{A\cap B}}{N}}{\frac{N_B}{N}} \approx \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Η συνάρτηση $A \longmapsto P(A|B)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας. $P_B(A) = P(A|B)$

π.χ. $P_B(\Omega) = P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

$P(A|B) = 1 - P(A^c|B)$

$P(A\cup\Gamma|B) = P(A|B) + P(\Gamma|B) - P(A\cap\Gamma|B)$

<u>Υπολογισμός της $P(A|B)$</u>

1) Με τον ορισμό
2) Με τον κλασικό ορισμό Δηλ. επιλέγοντας κατάλληλο δειγματικό χώρο

<u>Χρήσιμος τύπος</u> $P(A\cap B) = P(B)P(A|B)$

<u>Παράδειγμα</u> Κάλπη περιέχει 6 άσπρα + 4 μαύρα σφαιρίδια. Εξάγουμε 2 διαδοχικά χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια η πιθανότητα και τα δύο άσπρα.

6Α

6Α
4Μ

A_1 = το πρώτο σφαιρίδιο άσπρο

A_2 = το δεύτερο " "

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{6}{10}\frac{5}{9}$$

$$\parallel$$

$$P(A_2)P(A_1|A_2) \leftarrow \text{όχι λογικό}$$

Δεσμεύουμε ως προς το ενδεχόμενο που προηγείται χρονικά.

<u>πρόταση</u> (πολλαπλασιαστικός τύπος)

Έστω $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$, με $P(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})>0$ τότε

$$P(A_1\cap A_2\dots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2|\underline{A_1})P(A_3|\underline{A_1\cap A_2})\dots P(A_n|\underline{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}})$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$P(B)>0$