PL

Τετάρτη, 19 Ιανουαρίου 2022 11:12 πμ

* $C(X,Y)$ όπου $C(X,X)=V(X)$

Υπολογιστικά: $C(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$.

Ο) Αν (X,Y) μια διδιάστατη τ.μ. με $C(X,Y)=\sigma_{X,Y}$. Οι τ.μ. X και Y καλούνται ασυσχέτιστες αν: $\sigma_{X,Y}=C(X,Y)=0$

Επίσης, έστω X κ' Y τ.μ. με a, b σταθερές.

Ισχύει:

$$V(aX+bY)=E\{[aX+bY-E(aX+bY)]^2\}=$$

$$=E\{[a(X-\mu_X)+b(Y-\mu_Y)]^2\}=$$

$$=a^2\cdot E[(X-\mu_X)^2]+b^2\cdot E[(Y-\mu_Y)^2]+$$

$$+2ab\cdot E[(X-\mu_X)\cdot(Y-\mu_Y)]=$$

$$= a^2 V(X) + b^2 \cdot V(Y) + 2ab\, C(X,Y).$$

Σε περίπτωση που X κι Y ανεξάρτητες (ή ασυσχέτιστες), τότε:

$$V(aX+bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y),$$

αφού: $C(X,Y) = 0$.

P2

Ορ) Έστω (X,Y) μια διδιάστατη τ.μ. με $\sigma_{X,Y} = C(X,Y)$ και διασπορές $\sigma_X^2 = V(X)$ και $\sigma_Y^2 = V(Y)$. Ο <u>συντελεστής συσχέτισης</u> των X και Y, συμβολίζεται με $\rho(X,Y)$ ή $\rho_{X,Y}$ ή απλώς ρ, ορίζεται από τη σχέση

$$\rho = \rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\,\sqrt{V(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

<u>Ισχύει:</u> $-1 \leq \rho \leq 1$.

(Α) Αν X και Y τ.μ. και a, b, γ, δ σταθερές, με $a \cdot \gamma \neq 0$, τότε:

$$\rho(aX+b, \gamma Y+\delta) = \frac{C(aX+b, \gamma Y+\delta)}{\sqrt{V(aX+b)}\,\sqrt{V(\gamma Y+\delta)}} =$$

$a \cdot \gamma \, C(X,Y)$ $\qquad$ $a\gamma \, C(X,Y)$

$$= \frac{a \cdot \gamma \cdot C(X,Y)}{\sqrt{a^2 V(X)}\sqrt{\gamma^2 V(Y)}} = \frac{a\gamma\, C(X,Y)}{|a|\cdot|\gamma|\cdot\sqrt{V(X)}\cdot\sqrt{V(Y)}} =$$

$$= \frac{a\gamma}{|a|\cdot|\gamma|}\cdot\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \begin{cases} \rho(X,Y) & \text{αν } a\gamma>0 \\ -\rho(X,Y) & \text{αν } a\gamma<0. \end{cases}$$

Συνεπώς, ο συντελεστής συσχέτισης <u>δεν</u> μεταβάλλεται από αλλαγές στη μοναδα μέτρησης των τ.μ.

P3

Τετάρτη, 19 Ιανουαρίου 2022 11:59 πμ

Πχ) (συνέχεια) Διακριτή τ.μ. (X,Y) με σ.π.

$$f_{X,Y} = \frac{x+y}{21}, \quad x=1,2, \quad \kappa' \quad y=1,2,3.$$

Περιθώριες

$$f_X(x) = \sum_y \frac{x+y}{21} = \frac{x+2}{7}, \quad x=1,2$$

$$f_Y(y) = \sum_x \frac{x+y}{21} = \frac{2y+3}{21}, \quad y=1,2,3$$

Έστω: $E(XY) = \sum_{y=1}^{3} \sum_{x=1}^{2} xy \frac{x+y}{21} =$

$$= \sum_{y=1}^{3} \frac{y(y+1)+2y(y+2)}{21} = \sum_{y=1}^{3} \frac{y(3y+5)}{21} = \frac{24}{7}$$

Επίσης:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{2} x \frac{x+2}{7} = \frac{11}{7}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{2} x^2 \frac{x+2}{7} = \frac{19}{7}$$

και: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{19}{7} - \left(\frac{11}{7}\right)^2 = \frac{12}{49}$

Ομοίως:

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{3} y \frac{2y+3}{21} = \frac{46}{21}$$

$$E(Y^2) = \sum_{y=1}^{3} y^2 \frac{2y+3}{21} = \frac{114}{21}$$

και: $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{114}{21} - \left(\frac{46}{21}\right)^2 = \frac{278}{441}$

Η συνδιακύμανση των X και Y είναι

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{24}{7} - \frac{11}{7} \cdot \frac{46}{21} = -\frac{2}{147}$$

και επομένως

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-\frac{2}{147}}{\sqrt{\frac{12}{49}}\sqrt{\frac{278}{441}}} = -\frac{1}{\sqrt{834}}$$

P4

Τετάρτη, 19 Ιανουαρίου 2022 12:16 μμ

Πχ) (συνέχεια) (X,Y) συνεχής τ.δ. με σ.π.π.

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy, \quad 0 \leq x \leq y \leq 1$$

Περιθώριες

$$f_X(x) = 4x(1-x^2), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = 4y^3, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Επίσης

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1\int_0^y xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^y xy\, 8xy\, dx\, dy =$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 y^5\, dy = \frac{4}{9}$$

Και:

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\, dx = 4\int_0^1 x^{r+1}(1-x^2)\, dx$$

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\,dx = 4\int_0^1 x^{r+1}\cdot(1-x^2)\,dx$$

$$= \ldots = \frac{8}{(r+2)\cdot(r+4)}$$

Ομοίως

$$E(Y^r) = \int_{-\infty}^{\infty} y^r f_Y(y)\,dy = \int_0^1 4y^{r+3}\,dy = \frac{4}{r+4}.$$

Συνεπώς:

$$E(X) = \frac{8}{15} \quad \text{και:} \quad E(X^2) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225}$$

$$E(Y) = \frac{4}{5} \quad \text{και} \quad E(Y^2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$V(Y) = \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{2}{75}$$

και η συνδιακύμανση

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{9} - \frac{8}{15}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{225}$$

και τέλος:

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{4}{\sqrt{66}}.$$