PL

Τετάρτη, 12 Ιανουαρίου 2022 11:12 πμ

ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

(BIVARIATE DISTRIBUTIONS)

Έστω Ω ο δ.χ. ενός πειράματος. Ένα ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων (X,Y) που ορίζεται στο Ω καλείται δισδιάστατη τ.μ. και αντιστοιχεί κάθε στοιχείο ω του Ω ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y), όπου

$X(\omega)=x$ και $Y(\omega)=y$

(*) Αν (X,Y) δισδιάστατη τ.μ. τότε X και Y μονοδιάστατες.

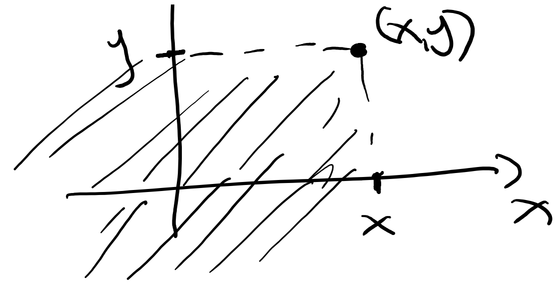
Η συνάρτηση:

$$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$$

$$=P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)\le x,\ Y(\omega)\le y\}),$$

όπου $-\infty<x<\infty$ και

όπου $-\infty < x < \infty$ και $-\infty < y < \infty$ και καλείται από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. X κ' Y.



Ως πιθανότητα, έχουμε: $0 \le F(x,y) \le 1$.

Ισχύουν:

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$$

$$F(x, -\infty) = \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0.$$

$$F(+\infty, +\infty) = \lim_{x,y \to \infty} F(x,y) = 1.$$

και:

$$F(x, +\infty) = \lim_{y \to \infty} F(x,y) = P(X \le x) = F_X(x)$$

$$F(+\infty, y) = \lim_{x \to \infty} F(x,y) = P(Y \le y) = F_Y(y)$$

όπου $F_X(x)$ και $F_Y(y)$ καλούνται

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνοτήτων των X και Y αντιστοίχως.

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ

Μια δισδιάστατη τ.μ. (X,Y) καλείται διακριτή εάν παίρνει με πιθ. 1 πεπερασμένο ή αριθ. άπειρο σύνολο τιμών $R_{X,Y} = \{(x_0,y_0),(x_0,y_1),(x_1,y_0),\ldots,(x_i,y_j),\ldots\}$.

Η συνάρτηση $f(x,y)$ η οποία

$$f(x_i,y_j) = P(X=x_i, Y=y_j) = P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x_i, Y(\omega)=y_j\})$$

καλείται από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και Y.

Ισχύουν:

↳ $f(x_i,y_j) \geq 0$, $i,j = 0,1,2,\ldots$

↳ $f(x,y) = 0$, αν (x,y) όχι στο $R_{X,Y}$

↳ $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} f(x_i,y_j) = 1$.

Όπου έχουμε: $x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots$

και $y_0 \le y_1 \le y_2 \le \ldots$

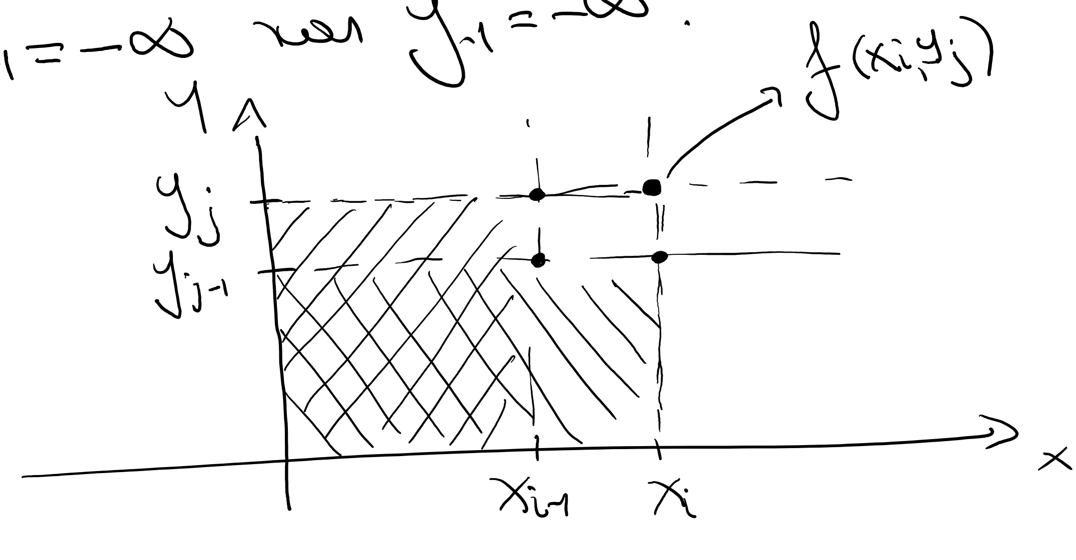
τότε η $f(x_i, y_j)$ συνδέεται με την $F(x,y)$ ως εξής:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } -\infty < x < x_0,\ -\infty < y < \infty \\ & \text{ή } -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < y_0 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{s} \sum_{i=0}^{r} f(x_i, y_j), & x_r < x < x_{r+1} \\ & y_s < y < y_{s+1} \end{cases}$$

<u>Επίσης:</u>

$$f(x_i, y_j) = F(x_i, y_j) - F(x_{i-1}, y_j) - F(x_i, y_{j-1}) + F(x_{i-1}, y_{j-1})$$

όπου $x_{-1} = -\infty$ και $y_{-1} = -\infty$.



ΣΥΝΕΧΗΣ

Μια διδιάστατη τ.μ. (X,Y) καλείται συνεχής αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση

$$f(x,y) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

με: $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

όπου η $f(x,y)$ καλείται από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X και Y.

Για πραγματικούς a, b, c, d με $a<b$ και $c<d$, έχουμε:

$$P(a<X<b,\ c<Y<d) = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Η συνάρτηση κατανομής γράφεται

$$F(x,y) = \int^{y}\int^{x} f(t,u)\,dt\,du$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty} \int_{-\infty} f(t,u)\,dt\,du$$

και αν η $f(x,y)$ συνεχής στο (x,y) τότε:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = f(x,y).$$

Επίσης ισχύει:

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$

P4
Τετάρτη, 12 Ιανουαρίου 2022 12:22 μμ

ΠΕΡΙΘΩΡΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ
(Marginal Distributions)

↳ Διακριτές

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} f(x_i, y_j), \quad i=0,1,2,\dots$$

ή

$$P(X=x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X=x_i, Y=y_j), \quad i=0,1,2,\dots$$

όμοια: $$f(y_j) = \sum_{i=0}^{\infty} f(x_i, y_j), \quad j=0,1,2,\dots$$

$X \backslash Y$	y_0	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	
x_0	$f(x_0,y_0)$	$f(x_0,y_1)$	$\dots$	$f(x_0,y_j)$	$\dots$	$f_X(x_0)$
x_1	$f(x_1,y_0)$	$f(x_1,y_1)$	$\dots$	$f(x_1,y_j)$	$\dots$	$f_X(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$
x_i	$f(x_i,y_0)$	$f(x_i,y_1)$	$\dots$	$f(x_i,y_j)$	$\dots$	$f_X(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	$f(y_0)$	$f(y_1)$	$\dots$	$f(y_j)$	$\dots$	1

$f_Y(y_0)$	$f_Y(y_1)$	$\cdots$	$f(y_j)$	$\cdots$	1

↳ <u>Συνεχής</u>

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \ , \quad -\infty < x < \infty$$

<u>κ'</u>

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \ , \quad -\infty < y < \infty .$$

P5

Τετάρτη, 12 Ιανουαρίου 2022 12:32 μμ

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

(Conditional Distributions).

↳ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ

Έστω μια δισδιάστατη τ.μ. (X,Y) με σ.π.

$$f_{X,Y}(x_i,y_j) = P(X=x_i, Y=y_j), \quad i,j=0,1,2,\ldots$$

και $f_Y(y_j) = P(Y=y_j)$

η περιθώρια της Y. Η συνάρτηση

$$f_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{f_{X,Y}(x_i,y_j)}{f_Y(y_j)}$$

του x_i δεδομένου $Y=y_j$, και $f_Y(y_j)>0$,

είναι μια συνάρτηση πιθανότητας και

καλείται δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας

της X δεδομένου της $Y=y_j$.

↳ ΣΥΝΕΧΕΣ

Αντίστοιχα, αν $f_{X,Y}(x,y)$ η σ.π.π. της διδιάστατης τ.μ. (X,Y), $-\infty<x,y<\infty$ και $f_Y(y)$ η περιθώρια της Y, τότε

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad , -\infty<x<\infty$$

είναι η δεσμευμένη σ.π.π. της X δεδομένου $Y=y$.

Πχ) Έστω (X,Y) διακριτή τ.μ. με σ.π.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+y}{21} \quad , x=1,2, \text{ή } y=1,2,3$$

Να υπολογισθούν οι δεσμευμένες σ.π. $X|Y=y$ και $Y|X=x$.

Οι περιθώριες των X και Y είναι:

$$f_X(x) = \sum_{y=1}^{3} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=1}^{3} \frac{x+y}{21} = \frac{3x+6}{21}$$

$$f_X(x) = \sum_{y=1} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=1} \frac{\;}{21} = \frac{\;}{21}$$

για $x=1,2$

Ομοίως:

$$f_Y(y) = \sum_{x=1}^{2} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x+y}{21} = \frac{3+2y}{21}$$

για $y=1,2,3$

Συνεπώς

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{x+y}{21}}{\frac{3+2y}{21}}$$

$$= \frac{x+y}{3+2y} \quad , x=1,2$$

και:

$$f_{Y|X}(y|X=x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{x+y}{21}}{\frac{3x+6}{21}} =$$

$$= \frac{x+y}{3x+6} \quad , y=1,2,3$$

$= \frac{\quad}{3x+6}$,

$x \backslash y$	1	2	3	$f_X(x)$
1	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{9}{21}$
2	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{12}{21}$
$f_Y(y)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{9}{21}$	1