PL

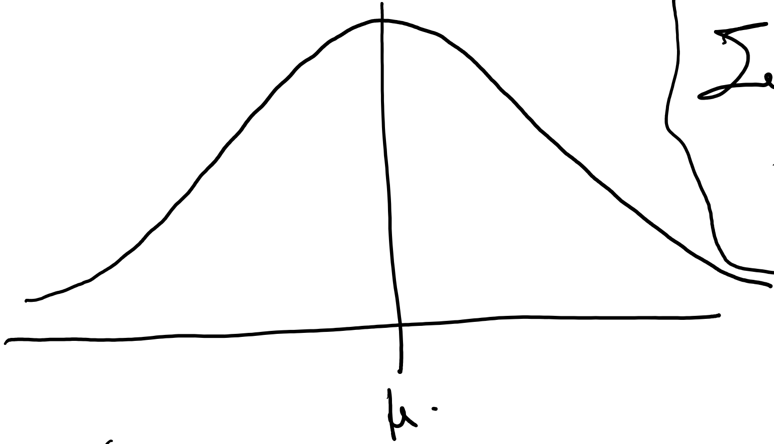
Τετάρτη, 22 Δεκεμβρίου 2021 11:21 πμ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (Normal)

Έστω X τ.μ. με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<\mu<\infty, \quad 0<\sigma^2<\infty$$

και λέγεται κανονική με παραμέτρους μ κ' σ^2.



Συμβολισμός: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ισχύει: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

και: $E(X) = \mu$ κ' $V(X) = \sigma^2$

ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ (Standard Normal)

Αν θέσουμε $\mu = 0$ κ' $\sigma^2 = 1$, τότε

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \quad , \; -\infty < x < \infty .$$

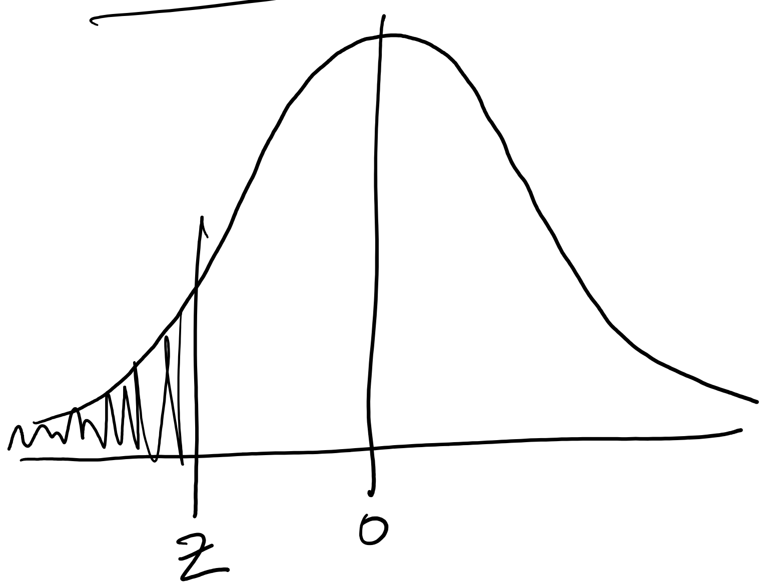
όπου: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, με $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Η κατανομή της Z τ.μ. καλείται τυποποιημένη κανονική $N(0,1)$.

Η συνάρτηση κατανομής της είναι

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad , \; -\infty < z < \infty .$$

η οποία είναι πινακοποιημένη!



P2

Τετάρτη, 22 Δεκεμβρίου 2021 11:57 πμ

Θ) $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

Έχουμε: $\Phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{-z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$

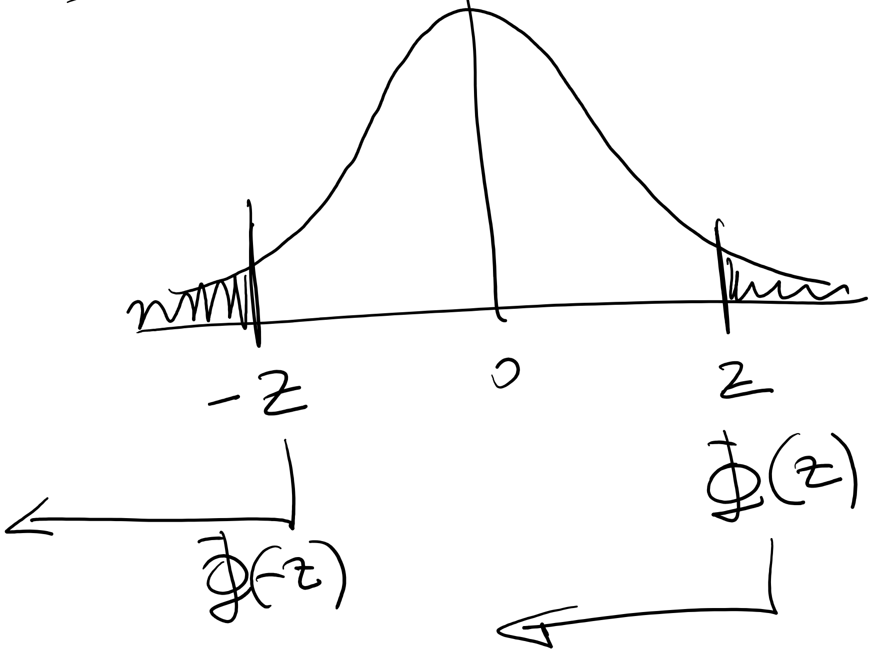
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{z}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ θέτοντας: $t = -u$

Οπότε:

$\Phi(z) + \Phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$= 1$

Άρα: $\boxed{\Phi(z) + \Phi(-z) = 1 \Rightarrow \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)}$



Πχ) Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα η X να απέχει από το μέσο $k = 1, 2, 3$ τυπικές αποκλίσεις.

Έχουμε: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, όπου $Z \sim N(0,1)$

$$P(|X-\mu| \leq k\sigma) = P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \leq k\right) =$$

$$= P(|Z| \leq k) = P(-k \leq Z \leq k) =$$

$$= \Phi(k) - \Phi(-k) = \Phi(k) - [1 - \Phi(k)] =$$

$$= 2\Phi(k) - 1.$$

όμως: $\Phi(1) = 0{,}8413$

$\Phi(2) = 0{,}9772$

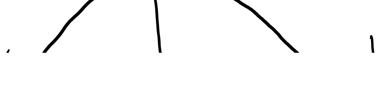
$\Phi(3) = 0{,}9987$

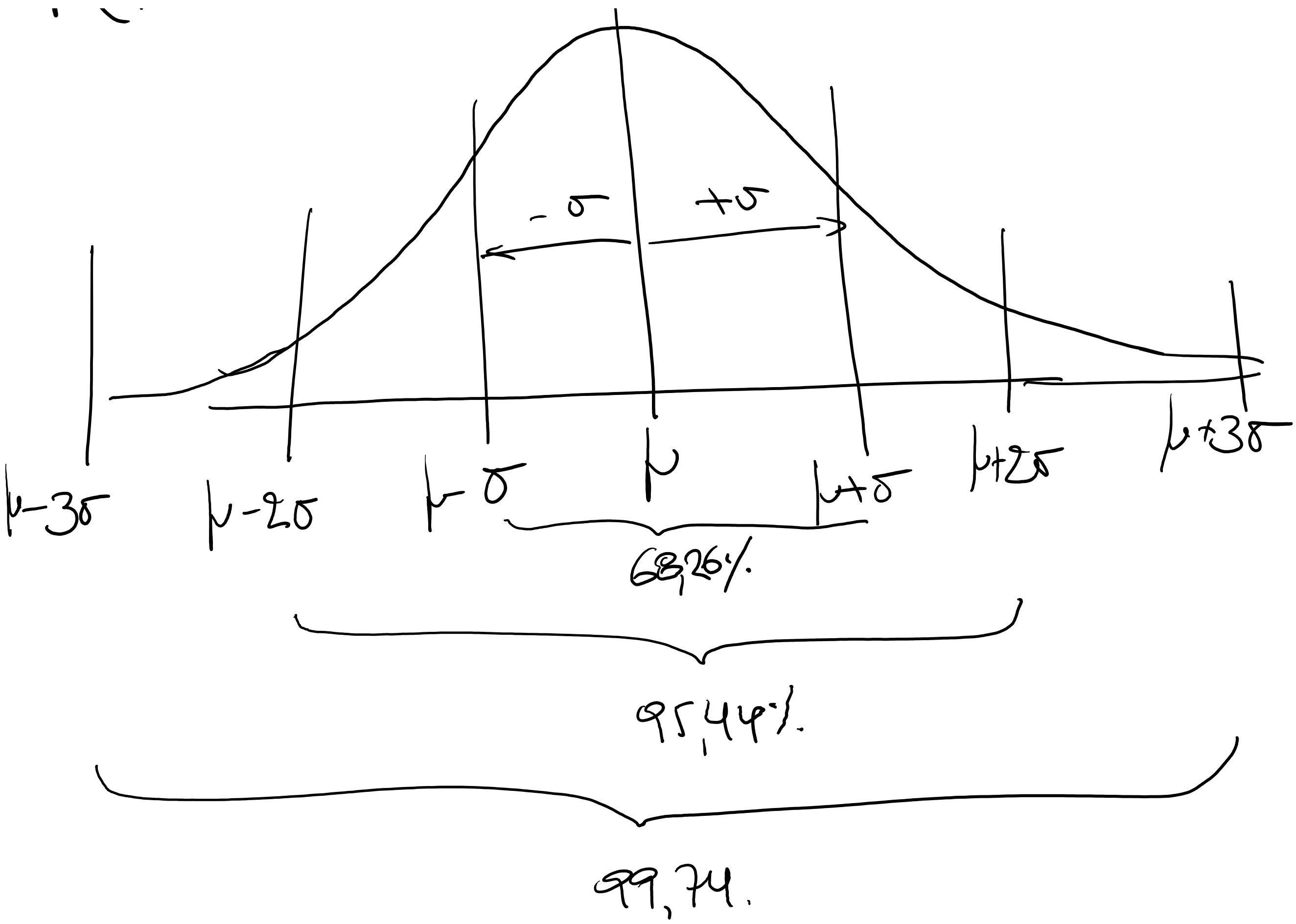
Οπότε:

$$P(|X-\mu| \leq \sigma) = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826.$$

$$P(|X-\mu| \leq 2\sigma) = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$$

$$P(|X-\mu| \leq 3\sigma) = 3 \cdot 0{,}9987 - 1 = 0{,}9974.$$




-σ
+σ
μ-3σ
μ-2σ
μ-σ
μ
μ+σ
μ+2σ
μ+3σ
68,26%
95,44%
99,74.

Πχ) Το επίπεδο Chl. ακολουθεί κανονική με μέσο 230 μονάδες κ' διασπορά 400

α). Ποιο το ποσοστό του πληθυσμού με Chl άνω των 250 μονάδων.

β) Ποιο % με Chl μεταξύ 175 κ' 200 μον.

γ) Συμμετρικό διάστημα γύρω από το μέσο έτσι ώστε το % των ατόμων εντός του διαστήματος να είναι ίσο με 10%.

α). Έστω τ.μ. X: το επίπεδο Chl του αίματος των εξεταζομένων.

Και: $X \sim N(230, 400)$.

Ζητάμε: $P(X>250) =$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{250-230}{20}\right) = P(Z>1)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}84 = 0{,}16.$$

β). $P(175 < X < 200) =$

$$= P\left(\frac{175-230}{20} < \frac{X-230}{20} < \frac{200-230}{20}\right) =$$

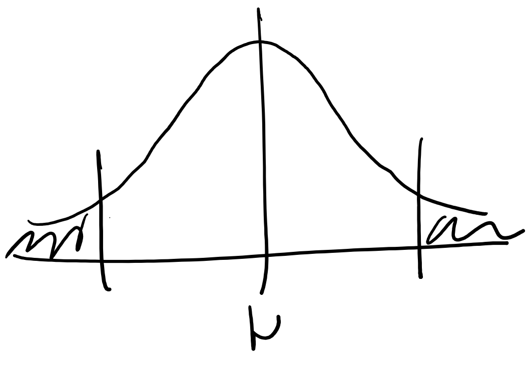
$$= P(-2{,}75 < Z < -1{,}5) =$$

$$= \Phi(-1{,}5) - \Phi(-2{,}75) =$$

$$= 1 - \Phi(1{,}5) - [1 - \Phi(2{,}75)] =$$

$$= \Phi(2{,}75) - \Phi(1{,}5) = 0{,}9970 - 0{,}9332$$

γ)



$$P(\mu - c < X < \mu + c) = 0{,}9$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\mu-c-230}{20} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu+c-230}{20}\right) = 0{,}90$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{c}{20} < Z < \frac{c}{20}\right) = 0{,}90$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{c}{20}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{20}\right) = 0{,}90 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{c}{20}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{c}{20}\right)\right] = 0{,}90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{c}{20}\right) - 1 = 0{,}90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{c}{20}\right) = 1{,}90 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c}{20}\right) = 0{,}95 \Rightarrow$$

Όμως: $\Phi(1{,}65) = 0{,}95$

$$\frac{c}{20} = 1{,}65 \Rightarrow \boxed{c = 1{,}65 \cdot 20 = 33}$$