P1

Παρασκευή, 17 Δεκεμβρίου 2021 3:14 μμ

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (Exponential)

Έστω τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & -\infty < x < 0. \end{cases}$$

η οποία καλείται εκθετική με παράμετρο θ, όπου $\theta > 0$.

Σημειώνουμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \theta e^{-\theta x} dx = \left[-e^{-\theta x}\right]_0^{\infty} = 1$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_0^x \theta e^{-\theta u} du =$$

$$= \left[-e^{-\theta u}\right]_0^x = 1 - e^{-\theta x}$$

Άρα: $\quad 0 \quad\quad -\infty < x < 0$

Άρα:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1-e^{-\theta x}, & 0 \le x < \infty. \end{cases}$$

Για τη μέση τιμή έχουμε:

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \cdot \theta e^{-\theta x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\theta} \cdot \int_0^{\infty} y e^{-y}\, dy$$, όπου κάναμε αλλαγή

Μετασχηματισμός : $\theta x = y$.

Οπότε:

$$\int_0^{\infty} y e^{-y}\, dy = \int_0^{\infty} y \left(-e^{-y}\right)' dy =$$

$$= -\left[y e^{-y}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} y' e^{-y}\, dy = \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy$$

$$= \left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = 1$$

Οπότε: $\boxed{\mu = E(X) = \frac{1}{\theta}}$.

Για τη διασπορά έχουμε:

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, όπου

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \theta e^{-\theta x}\, dx = \frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty y^2 e^{-y}\, dy$$

με την αλλαγή μεταβλητής: $\theta x = y$.

όπου: $$\int_0^\infty y^2 e^{-y}\, dy = \underbrace{\cancel{-\left[y^2 e^{-y}\right]_0^\infty}}_{\to 0} + 2\underbrace{\cancel{\int y e^{-y}\, dy}}_{\to 1}$$

$$= 2$$

Συνεπώς: $E(X^2) = \frac{2}{\theta^2}$, και:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\theta^2} - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

<u>Οπότε:</u>

$$\underline{\mu = E(X) = \frac{1}{\theta}} \quad κ' \quad \underline{V(X) = \frac{1}{\theta^2}}$$

Συμβολικά: $X \sim Exp(\theta)$.

Εναλλακτικά, η εκθετική μπορεί να γραφεί

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}$$

με $E(x) = \theta$ κ' $V(x) = \theta^2$.

P2

ΕΛΛΕΙΨΗ ΜΝΗΜΗΣ

$$P(X>x+y \mid X>x) = P(X>y), \quad x,y>0.$$

Έχουμε:

$$P(X>x+y \mid X>x) = \frac{P(X>x+y,\ X>x)}{P(X>x)} =$$

$$= \frac{P(X>x+y)}{P(X>x)} = \frac{1-P(X\le x+y)}{1-P(X\le x)} =$$

$$= \frac{1-\left[1-e^{-\vartheta(x+y)}\right]}{1-\left[1-e^{-\vartheta x}\right]} = \frac{e^{-\vartheta(x+y)}}{e^{-\vartheta x}} = e^{-\vartheta y}$$

$$= 1-\underbrace{\left[1-e^{-\vartheta y}\right]} = 1-F(y) = P(X>y).$$

P3

Παρασκευή, 17 Δεκεμβρίου 2021 4:05 μμ

Πχ) $1^{ο}$ έτος — 5000 €

$2^{ο}$ — 3000 €

$3^{ο}$ — 2000 €

$4^{ο}$ — 1500 €

$5^{ο}$ — 750 €

χρόνος αποσβεσης Exp(0,4).

α) Ποια η πιθ. να εμφανίσει βλάβη στην εγγύηση

β) Από αυτά που έχουν βλάβη στην εγγύηση, ποια έχουν χαλά το $2^{ο}$ έτος.

γ) Αναμενόμενη τιμή κ' διασπορά της εγγύησης.

δ) Εταιρεία αγόρασε 20 αυτοκίνητα. Ποια η πιθανότητα να παρουσιάσουν βλάβη 7 ή περισσότερα στην εγγύηση.

Λύση:

α). Έστω X: ο χρόνος μέχρι την πρώτη βλάβη (σε χρόνια).

Έχουμε: $X \sim Exp(0,4)$.

άρα: $f(x) = 0,4 \cdot e^{-0,4x}$ $x > 0$

$-0,4x$

και: $F(x) = 1 - e$,

Ζητάμε: $P(X \leq 5) = F(5)$

$$= 1 - e^{-0,4 \cdot 5} = 1 - e^{-2}$$

β). $P(X \leq 1 \mid X \leq 5) =$

$$= \frac{P(X \leq 1, X \leq 5)}{P(X \leq 5)} = \frac{P(X \leq 1)}{P(X \leq 5)} =$$

$$= \frac{F(1)}{F(5)} = \frac{1 - e^{-0,4 \cdot 1}}{1 - e^{-0,4 \cdot 5}} = \frac{1 - e^{-0,4}}{1 - e^{-2}}$$

γ) Έχουμε:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{0,4} = 2,5$$

και:

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{0,4^2} = \frac{1}{0,16} = 6,25$$

↳ (α) 1ο είναι: $P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-0,4}$

↳ (β) 2ο είναι $P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1)$

$$= 1 - e^{-0,4 \cdot 2} - [1 - e^{-0,4}] =$$

$$= 1 - e^{-0,4\cdot 2} - [1 - e^{-0,4}] =$$

$$= e^{-0,4} - e^{-0,8}$$

(γ) $\to$ 3° έτος: $P(2 < X \leq 3) = F(3) - F(2)$

$$= e^{-0,8} - e^{-1,2}$$

(δ) $\to$ 4° έτος: $P(3 < X \leq 4) = F(4) - F(3)$

$$= e^{-1,2} - e^{-1,6}$$

(ε) $\to$ 5° έτος: $P(4 < X \leq 5) = F(5) - F(4)$

$$= e^{-1,6} - e^{-2}$$

Έστω Y: το κόστος αντικατάστασης

Y:	5000	3000	2000	1500	750
$P(Y=y)$:	(α)	(β)	(γ)	(δ)	(ε)

Οπότε: $E(Y) = \sum_{y=750}^{5000} y \cdot P(Y=y) = - - -$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

όπου: $E(Y^2) = \sum_{y=750}^{5000} y^2 P(Y=y) = - - -$

δ). Έστω: W: # αποτυχιών πριν χρ/. στο ...

$W \sim Bin(10, p)$, όπου p από το (α).

$$P(W \geq 7) = \sum_{w=7}^{10} \binom{10}{w} p^w \cdot (1-p)^{10-w}$$

$$= \binom{10}{7} p^7 \cdot (1-p)^3 + \ldots + \binom{10}{10} p^{10} \cdot (1-p)^0$$

$$= \ldots$$