P1

Τετάρτη, 1 Δεκεμβρίου 2021 11:11 πμ

Μέση τιμή

└→ $\mu = E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot f(x_k)$ ... διακριτή

└→ $\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ ... συνεχής

Διασπορά, ορισμός.

Έστω X τ.μ. με $\mu = E(x)$. Τότε:

$\sigma^2 = \sigma_x^2 = V(x) = E\left[(x-\mu)^2\right]$ είναι η διασπορά της τ.μ. X

και: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(x)}$

είναι η τυπική απόκλιση.

Άρα:

└→ $\sigma_x^2 = V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k-\mu)^2 \cdot f(x_k)$ ... διακριτή

└→ $\sigma_x^2 = V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$ ... συνεχής

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $a, \beta \in \mathbb{R}$. Έχουμε

α) $E(aX+\beta) = \sum_{k \geq 0}^{\infty} (a x_k + \beta) f(x_k) =$

$= a \cdot \sum_{k\geq 0}^{\infty} x_k \cdot f(x_k) + \beta \cdot \sum_{k \geq 0}^{\infty} f(x_k) =$

$= a \cdot E(X) + \beta$

β) $E[g(X) + h(X)] = \sum_{k \geq 0}^{\infty} [g(x_k) + h(x_k)] \cdot f(x_k) =$

$= \sum_{k\geq 0}^{\infty} g(x_k) \cdot f(x_k) + \sum_{k \geq 0}^{\infty} h(x_k) \cdot f(x_k) =$

$= E[g(X)] + E[h(X)]$

$aE(X)+\beta$

γ) $V(aX+\beta) = E[(aX+\beta-\mu)^2] =$

$= E[(aX+\cancel{\beta}-aE(X)-\cancel{\beta})^2] =$

$= E[(aX-aE(X))^2] = a^2 \underbrace{E[(X-E(X))^2]}_{V(X)}$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{V(x)}$$

$$= a^2 \cdot V(x)$$

δ) $V(x) = E\left[(x-\mu)^2\right] = E\left[x^2+\mu^2-2\mu x\right]$

$$= E(x^2)+\mu^2-2\mu E(x) = E(x^2)+\mu^2-2\mu^2$$

$$= E(x^2)-\mu^2 = E(x^2)-E(x)^2$$

<u>Άρα:</u> $\boxed{V(x)=E(x^2)-E(x)^2}$

(*) Μια τ.μ. $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ καλείται κανονικοποιημένη αφού: $E(Z)=0$ κι $V(Z)=1$.

<u>Άρα:</u>

$$E(Z)=E\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]=\frac{1}{\sigma}\cdot\left(E(x)-\mu\right)=0$$

<u>και</u>

$$V(Z)=V\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}V(x-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} V(X) = 1$$

ΡΟΠΕΣ (Moments).

Ροπές μιας τ.μ. είναι η μέση τιμή μιας συγκεκριμένης συνάρτησης της τ.μ.

α) r-τάξης ροπή της X περί το C

$$\mu_r(c) = E\left[(X-c)^r\right] \quad , r=1,2,\ldots$$

β) r-τάξης ροπή της X περί την αρχή (μηδέν)

$$\mu_r' = E\left(X^r\right) \quad , r=1,2,\ldots$$

γ) r-τάξης κεντρική ροπή (περί τον μέσο)

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] \quad , r=1,2,\ldots$$

Βλέπουμε:

$\hookrightarrow \mu_1' = \mu = E(X)$

$\hookrightarrow \mu_1 = E[X-\mu] = E(X) - \mu = 0$

$\hookrightarrow \mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = V(X) = \sigma^2$

Επίσης:

δ) Παραγοντική ροπή r-τάξης (καθοδική)

$$\mu_{(r)} = E[(X)_r] = \sum_{x=r}^{\infty} (x)_r f(x), \quad r=1,2,\ldots$$

όπου: $(X)_r = X\cdot(X-1)\cdot(X-2)\cdots(X-r+1)$

$(X-(r-1))$

Η διασπορά για μια τ.μ. μπορεί να γραφεί:

$$V(X) = E[(X)_2] + E(X) - E(X)^2$$

αφού: $E[(X)_2] = E[X\cdot(X-1)] = E[X^2 - X]$

$$= E(X^2) - E(X).$$

Άρα: $V(X) = E[(X)_2] + E(X) - E(X)^2$

$$= E(X^2) - \cancel{E(X)} + \cancel{E(X)} - E(X)^2$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω X τ.μ. με τιμές στο R_X και $g(\cdot)$ οποιαδήποτε συνάρτηση με π.ο. το R_X, για την οποία υπάρχει η $E[g(X)]$.

i) Αν $g(x) \geq a$, $\forall x \in R_X$: $E[g(X)] \geq a$

ii) Αν $g(x) \leq \beta$, $\forall x \in R_X$: $E[g(X)] \leq \beta$

iii) Αν $a \leq g(x) \leq \beta$, $\forall x \in R_X$: $a \leq E[g(X)] \leq \beta$

iv) Αν η $h(\cdot)$ συνάρτηση για την οποία η $E[h(X)]$ είναι τ.ω. $h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in R_X$

τότε: $E[h(X)] \leq E[g(X)]$

ΔΟΚΙΜΗ BERNOULLI

Έστω πείραμα τύχης με δ.χ. Ω με ενδεχόμενο A και: $A + A' = \Omega$ (διαμέριση του Ω), όπου το ένα παριστάνει την "επιτυχία" (ε) και το άλλο την "αποτυχία" (α). Θα καλείται δοκιμή Bernoulli με:

$$P(\{\varepsilon\}) = p \quad \text{και} \quad P(\{\alpha\}) = 1 - P(\{\varepsilon\}) = 1 - p$$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ BERNOULLI

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli. Η κατανομή της τ.μ. X καλείται κατανομή Bernoulli με παράμετρο p.
Η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$f(x) = P(X = x) = p^x \cdot (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \quad 0 < p < 1$$

και η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$\begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ q = 1 - p, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < \infty \end{cases}$$

Επίσης:

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{1} x \cdot P(X = x) =$$

$$= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = p$$

var:

$$V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{x=0}^{1} (x-p)^2 \cdot p^x \cdot (1-p)^{1-x} =$$

$$= (-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p =$$

$$= p \cdot (1-p) \cdot \left[p + (1-p)\right] = p \cdot (1-p) = p \cdot q$$