PL

Πχ) Έστω X: το # από γλώσσες που μιλάει κάθε παιδί.

Έστω $P(X=x) = p(x) = f(x)$ ΜΓ

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0,663	0,226	0,066	0,022	0,019	0,004

α) Να υπολογίσετε τον μέσο των X

β) Ποια η διασπορά και η τυπική απόκλιση

α) $\mu_X = E(X) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot P(X=x) =$

$= 1 \cdot 0{,}663 + 2 \cdot 0{,}226 + \ldots + 6 \cdot 0{,}004 = 1{,}52$

β) $V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$

$= E(X^2) - E(X)^2$

όπου: $E(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2 \cdot P(X=x) =$

$= 1^2 \cdot 0{,}663 + 2^2 \cdot 0{,}226 + 3^2 \cdot 0{,}066 + \dots + 6^2 \cdot 0{,}004$

$= 3{,}132$

Συνεπώς: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= 3{,}132 - (1{,}52)^2 = 0{,}8216$

Τέλος: $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}8216} \simeq 0{,}9064$

γ) $P(X \leq 3) = \sum_{x=1}^{3} P(X=x) = 0{,}663 + 0{,}226 + 0{,}066$

$= 0{,}955$

δ) $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) =$

$= 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X=1)$

$= 1 - 0{,}663 = 0{,}337$

ε) $P(2 < X \leq 4) = P(X=3) + P(X=4)$

$= 0{,}066 + 0{,}022 = 0{,}088$

Πχ | Έχουμε ζάρι, όπου X: ο αριθμ. του ζαριού

και:

x	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1-\theta}{6}$	$\frac{1-\theta}{6}$	$\frac{1-\theta}{6}$	$\frac{1+\theta}{6}$	$\frac{1+\theta}{6}$	$\frac{1+\theta}{6}$

Έχουμε: $\sum_{x=1}^{6} P(X=x) = 3\cdot\left(\frac{1-\theta}{6}\right) + 3\left(\frac{1+\theta}{6}\right)$

$$= \frac{3}{6} - \cancel{\frac{3}{6}\theta} + \frac{3}{6} + \cancel{\frac{3}{6}\theta} = 1$$

α) Έχουμε:

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{6} x\cdot P(X=x) =$$

$$= 1\,\frac{1-\theta}{6} + 2\,\frac{1-\theta}{6} + 3\,\frac{1-\theta}{6} + 4\,\frac{1+\theta}{6} + 5\,\frac{1+\theta}{6} + 6\,\frac{1+\theta}{6}$$

$$= (1+2+3+4+5+6)\frac{1}{6} + (-1-2-3+4+5+6)\frac{\theta}{6} =$$

$$= \frac{21}{6} + \frac{9}{6}\theta = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\theta = \frac{1}{2}(7+3\theta)$$

β) $\frac{1}{2}(7+3\theta) > 1 \Rightarrow 7+3\theta > 2 \Rightarrow 3\theta > -5$

$\Rightarrow \theta > -\frac{5}{3}$

κ' $\frac{1}{2}(7+3\theta)<6 \Rightarrow 7+3\theta<12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\theta<5 \Rightarrow \theta<\frac{5}{3}$

Άρα: $-\frac{5}{3}<\theta<\frac{5}{3}$

Επίσης, ξέρουμε:

- $0\le\frac{1-\theta}{6}\le 1 \Rightarrow 0\le 1-\theta\le 6 \Rightarrow -6\le\theta-1\le 0$

  $\Rightarrow -5\le\theta\le 1$

- $0\le\frac{1+\theta}{6}\le 1 \Rightarrow 0\le 1+\theta\le 6 \Rightarrow -1\le\theta\le 5$

Άρα, οι παραπάνω ανισότητες ικανοποιούνται για

$-1\le\theta\le 1$

Τέλος, για $\theta=1$ έχουμε:

$E(X)=\frac{1}{2}(7+3\cdot 1)=\frac{10}{2}=5$

Πχ) Έστω X τ.μ. με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0<x<6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

α) $c=$; β) $F(x)=$; γ) $E(x)=$; , $V(x)=$;

α) Γενικά: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^6 f(x)dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^6 cx^2 dx = 1 \Rightarrow c\frac{x^3}{3}\Big|_0^6 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot\left[\frac{6^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = c\frac{6^3}{3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$$

β) Παίρνουμε:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x ct^2 dt =$$

$$= c\frac{t^3}{3}\Big|_0^x = c\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{216}, \text{ για } 0<x<6$$

$\{ 0, -\infty < x \le 0$

Άρα:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 0 \\ \dfrac{x^3}{216}, & 0 < x < 6 \\ 1, & 6 \le x < \infty \end{cases}$$

γ) $E(X) = \int_0^6 x f(x) dx = \int_0^6 x c x^2 dx =$

$= c \int_0^6 x^3 dx = c \frac{x^4}{4} \Big|_0^6 = c \frac{6^4}{4} = \ldots = 4{,}5$

και

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

όπου:

$E(X^2) = \int_0^6 x^2 f(x) dx = c \int_0^6 x^4 dx = c \frac{x^5}{5} \Big|_0^6 =$

$= \frac{1}{72} \cdot \frac{6^5}{5} = \frac{6^3}{10} = \frac{216}{10} = 21{,}6$

Τέλος:

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 21{,}6 - 4{,}5^2 = 1{,}35$

Πχ | Έστω X τ.μ. με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x < \infty \end{cases}$$

α) Να υπολογίσουμε $E(X)$ κ' $V(X)$.

α) Παραγωγίζουμε την $F(x)$ και --

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & αλλού. \end{cases}$$

Επίσης: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2\,dx =$

$= 3\int_0^1 x^3\,dx = 3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$

Επίσης: $E(X^2) = \int_0^1 x^2 3x^2\,dx = 3\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{3}{5}$

Οπότε: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}$

και: $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{3}{80}}$

β) $P(X > 1/3) = 1 - P(X \le 1/3) = 1 - F(1/3)$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Αλλιώς: $P\left(X > \frac{1}{3}\right) = \int_{1/3}^{1} f(x)\,dx = \int_{1/3}^{1} 3x^2\,dx =$

$$= \cancel{3}\,\frac{x^3}{\cancel{3}}\Bigg|_{1/3}^{1} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

γ) $P\left(\frac{1}{3} \le X < \frac{3}{4}\right) = \int_{1/3}^{3/4} f(x)\,dx = \text{---}$

ή $P\left(\frac{1}{3} \le X < \frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right)$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{3}{4}\right)$ ή $P\left(\frac{1}{3} \le X \le \frac{3}{4}\right)$

$P\left(\frac{1}{3} < X \le \frac{3}{4}\right)$