P1

Τετάρτη, 8 Δεκεμβρίου 2021 11:27 πμ

BINOMIAL - ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω τ.μ. X: ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία ν ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p, όπου:

$$P_i(\{\varepsilon\}) = p, \quad P_i(\{\alpha\}) = 1-p, \quad i = 1, 2, \dots, \nu$$

σταθερή σε όλες τις δοκιμές.

Η κατανομή της τ.μ. X καλείται διωνυμική με παραμέτρους ν και p.

Έστω $X = x$ επιτυχίες.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & | & & | & | & | & & | \end{matrix}$$

$$\underbrace{p \quad p \quad p \quad \cdots \quad p}_{x\text{-επιτυχίες}} \quad \underbrace{1-p \quad 1-p \quad \cdots \quad 1-p}_{(\nu-x)\text{-αποτυχίες}}$$

Η πιθανότητα να πάρουμε το πιο πάνω σενάριο

Είναι: $p^x \cdot (1-p)^{\nu-x}$

Πόσους τρόπους έχουμε να πάρουμε x επιτυχίες σε ν-προσπάθειες: $\binom{\nu}{x} = \frac{\nu!}{x!\cdot(\nu-x)!}$

Η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$f(x) = P(X=x) = \binom{\nu}{x} p^x \cdot (1-p)^{\nu-x}, \quad x = 0,1,\dots,\nu$$

όπου, από το διώνυμο του Νεύτωνα, έχουμε

$$\sum_{x=0}^{\nu} f(x) = \sum_{x=0}^{\nu} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\nu} \binom{\nu}{x} p^x \cdot (1-p)^{\nu-x} = \big(p+(1-p)\big)^{\nu} = 1$$

Συμβολικά: $X \sim Bin(\nu, p)$.

Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \sum_{k=0}^{[x]} \binom{\nu}{k} p^k \cdot (1-p)^{\nu-k}, & 0 \le x < \nu \\ 1, & \nu \le x < \infty \end{cases}$$

Η μέση τιμή της X είναι:

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{\nu} x f(x) = \sum_{x=0}^{\nu} x P(X=x) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\nu} x \binom{\nu}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{\nu-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{\nu} \cancel{x} \frac{\nu}{\cancel{x}} \binom{\nu-1}{x-1} p^{x} \cdot (1-p)^{\nu-x} =$$

$$= \nu \sum_{x=1}^{\nu} \binom{\nu-1}{x-1} p^{x} \cdot (1-p)^{\nu-x} \qquad \underline{\underline{y = x-1}}$$

$$= \nu \sum_{y=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{y} p^{y+1} \cdot (1-p)^{\nu-y-1}$$

$$= \nu p \cdot \underbrace{\sum_{y=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{y} p^{y} \cdot (1-p)^{\nu-1-y}}_{1}$$

$$= \nu p.$$

Επίσης, η διασπορά μπορεί να γραφεί:

$$V(X) = E[(X)_2] + E(X) - E(X)^2$$

Onew:

$$E\left[(X)_2\right] = \sum_{x=0}^{v} x\cdot(x-1)\cdot f(x) =$$

$$= \sum_{x=0}^{v} x\cdot(x-1)\cdot\binom{v}{x}\cdot p^{x}\cdot(1-p)^{v-x} =$$

$$= v\cdot(v-1)\cdot\sum_{x=2}^{v}\binom{v-2}{x-2}p^{x}\cdot(1-p)^{v-x} \qquad \underline{y = x-2}$$

$$= v(v-1)p^2\cdot\underbrace{\cancel{\sum_{y=0}^{v-2}\binom{v-2}{y}p^{y}\cdot(1-p)^{v-2-y}}}_{\to 1}$$

$$= v\cdot(v-1)\cdot p^2$$

Onore:

$$V(x) = E\left[(X)_2\right] + E(x) - E(x)^2$$

$$= v\cdot(v-1)\cdot p^2 + vp - (vp)^2$$

$$= \cancel{v^2p^2} - vp^2 + vp - \cancel{v^2p^2}$$

$$= vp(1-p)$$

$$\boxed{V(x) = vp(1-p)}$$

$= \nu p (\quad)$

Άρα: $\boxed{E(X)=\nu p}$ και $\boxed{V(X)=\nu\cdot p(1-p)}$

$$\circledast \quad \binom{\nu}{x} = \frac{\nu!}{x!\,(\nu-x)!} = \frac{\nu}{x}\,\frac{(\nu-1)!}{(x-1)!\,[(\nu-1)-(x-1)]!}$$

$$= \frac{\nu}{x}\cdot\binom{\nu-1}{x-1}.$$

P2

Τετάρτη, 8 Δεκεμβρίου 2021 12:14 μμ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (Geometric)

Έχουμε τ.μ. X: ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία, σε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p, σταθερή για όλες τις δοκιμές.

Έχουμε:

$$\overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{(x-1)} \quad 1$$

$$(1-p)\ (1-p)\ (1-p)\ \cdots\ (1-p)\ \ p$$

Συνεπώς, η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$f(x) = P(X=x) = (1-p)^{x-1} \cdot p$$

όπου:

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} \cdot p =$$

$$= p \cdot \sum^{\infty} (1-p)^{x-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

$$= p \cdot \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , -\infty < x < 1 \\ 1-(1-p)^{[x]} & , 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

όπου: $F(x) = P(X \leq [x]) = 1 - P(X > [x])$.

<u>και:</u> $P(X > [x]) = \sum_{k=[x]+1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=[x]+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p =$

$$= p(1-p)^{[x]} \cdot \sum_{k=[x]+1}^{\infty} (1-p)^{k-[x]-1} \qquad \underline{\underline{k-[x]-1 = i}}$$

$$= p(1-p)^{[x]} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i} = p(1-p)^{[x]} \frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= (1-p)^{[x]}$$

Οπότε: $F(x) = 1 - (1-p)^{[x]}$

Συμβολικά: $X \sim Geom(p)$

Μεση τιμή: $\quad q = 1-p$

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x p q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1}$$

Διασπορά:

$$V(x) = E[(x)_2] + E(x) - E(x)^2, \quad \text{όπου:}$$

$$E[(x)_2] = \sum_{x=2}^{\infty} x \cdot (x-1) p q^{x-1} = pq \cdot \sum_{x=2}^{\infty} x \cdot (x-1) q^{x-2}$$

Γνωρίζουμε: $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} q^x = (1-q)^{-1}$, για $|q|<1$

Με διαδοχικές παραγωγίσεις παίρνουμε:

$$\sum^{\infty} x \cdot q^{x-1} = (1-q)^{-2}$$

$x=1$

και

$$\sum_{x=2}^{\infty} x\cdot(x-1)\cdot q^{x-2} = 2(1-q)^{-3}$$

Οπότε:

$$E(x) = p\cdot\sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1} = p(1-q)^{-2} = \frac{1}{p}$$

και:

$$E[(x)_2] = pq\cdot\sum_{x=2}^{\infty} x\cdot(x-1)\cdot q^{x-2} = pq\,2(1-q)^{-3} = \frac{2q}{p^2}$$

Οπότε:

$$V(x) = E[(x)_2] + E(x) - E(x)^2 =$$

$$= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

ΕΛΛΕΙΨΗ ΜΝΗΜΗΣ

$$P(X>k+r \mid X>k) = P(X>r), \quad k,r=0,1,2,\ldots$$

Απόδ.:

$$P(X>k+r \mid X>k) = \frac{P(X>k+r,\, X>k)}{P(X>k)} =$$

$$= \frac{P(X>k+r)}{P(X>k)} = \frac{1-P(X\le k+r)}{1-P(X\le k)} =$$

$$= \frac{1-[1-q^{k+r}]}{1-[1-q^{k}]} = \frac{q^{k+r}}{q^{k}} = q^{r} =$$

$$= 1-[1-q^{r}] = 1-F(r) = P(X>r).$$