P1

Πχ) Ρίχνουμε το κέρμα δυο φορές, και

X: πλήθος γραμμάτων.

Το $R_X = \{0, 1, 2\}$ με

$$f(0) = P(X=0) = P(\{KK\}) = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = P(X=1) = P(\{K\Gamma\}, \{\Gamma K\}) = \frac{2}{4}$$

$$f(2) = P(X=2) = P(\{\Gamma\Gamma\}) = \frac{1}{4}$$

και προφανώς:

$$f(0) + f(1) + f(2) = \sum_{x=0}^{2} f(x) = 1$$

Πχ) Έστω X (σε λεπτά της ώρας) ο χρόνος αναμονής σε σταθμό τραίνου είναι συνεχής τ.μ. με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 2cx, & 0 \le x < 1 \\ 2c, & 1 \le x < 2 \\ cx, & 2 \le x < 4 \\ 1, & 4 \le x < \infty. \end{cases}$$

α) $C = ;$

Για να υπολογίσουμε την $f(x)$, την σ.π.π., παραγωγίζουμε ως προς X, και παίρνουμε:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 2C, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ C, & 2 \le x < 4 \\ 0, & 4 \le x < \infty \end{cases}$$

ή

$$f(x) = \begin{cases} 2C, & 0 \le x < 1 \\ C, & 2 \le x < 4 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Οπότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 2c\,dx + \int_2^4 c\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2cx\Big|_0^1 + cx\Big|_2^4 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2c(1-0) + c\cdot(4-2) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2c + 2c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1/4}$$

<u>Εναλλακτικά:</u>

$$F(4-) = F(4+) = F(4) = 1$$

Άρα: $\lim_{x \to 4^-} (cx) = c \cdot 4 = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1/4}$.

β) $P(X \leq 3/2) = F(3/2) = 2c = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$P(3 < X \leq 5) = F(5) - F(3)$$

$$= 1 - 3c = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3)$$

$$= 1 - 3c = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$= 1 - 3c = 1 - \frac{\;}{4} = \frac{\;}{4}.$$

$$A: \; P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3).$$

$$P(X>3 \mid X>2) = \frac{P(X>3\,,\; X>2)}{P(X>2)} =$$

$$= \frac{P(X>3)}{P(X>2)} = \frac{1 - P(X \leq 3)}{1 - P(X \leq 2)} =$$

$$= \frac{1 - 3c}{1 - 2c} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

P2

Πχ) Έστω η διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας : $f(x) = P(X=x) = cx$

όπου: $x = 1, 2, \ldots, \nu$.

α) $c = ;$

Έχουμε: $\sum_{x=1}^{\nu} P(X=x) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^{\nu} cx = 1 \Rightarrow c \cdot \sum_{x=1}^{\nu} x = 1$$

$$\Rightarrow c \cdot \frac{\nu \cdot (\nu+1)}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{2}{\nu \cdot (\nu+1)}}.$$

β) Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \sum_{k=1}^{[x]} f(k) = \frac{2}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \sum_{k=1}^{[x]} k =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{} \cdot \frac{[x] \cdot ([x]+1)}{} = \frac{[x] \cdot ([x]+1)}{}$$

$$= \frac{}{\nu\cdot(\nu+1)} \cdot \frac{}{\cancel{2}} = \frac{}{\nu\cdot(\nu+1)}.$$

όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του x.

Επίσης:

$\hookrightarrow F(x) = 0 \,, \; -\infty < x < 1$

$\hookrightarrow F(x) = 1 \,, \; \nu \leq x < \infty$

Οπότε:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \,, & -\infty < x < 1 \\ \dfrac{[x]\cdot([x]+1)}{\nu\cdot(\nu+1)} \,, & 1 \leq x < \nu \\ 1 \,, & \nu \leq x < \infty . \end{cases}$$

P3

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ + ΔΙΑΣΠΟΡΑ

μέτρο θέσης

μέτρο μεταβλητότητας

ΟΡΙΣΜΟΣ

α) Έστω X διακριτή τ.μ. Τότε, αν

$$f(x_k) = P(X = x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

έχουμε:

$$\mu = \mu_X = E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot f(x_k).$$

β) Έστω X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x)$, $-\infty < x < \infty$

Τότε: $$\mu = \mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

<u>Πχ</u> Ρίχνω ένα ζάρι.

Έχουμε: $f(x) = P(X=x) = \frac{1}{6}$, $x=1,\dots,6$

Έχουμε: $E(X) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot P(X=x) =$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sum_{x=1}^{6} x = \frac{6 \cdot 7}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$= 3,5$$

(*) Έστω X συνεχής τ.μ. με

$$f(x) = \frac{1}{2\theta} \quad , \quad -\theta < x < \theta$$

<u>Τότε:</u) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\theta}^{\theta} x \frac{1}{2\theta} dx$

$$= \frac{1}{2\theta} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-\theta}^{\theta} = \frac{1}{4\theta} \cdot \left[\theta^2 - (-\theta)^2\right] = 0$$