PL

Τετάρτη, 24 Νοεμβρίου 2021 11:20 πμ

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Η ολοκλήρωση είναι η "αντίστροφη πράξη" της παραγώγισης.

→ Αν $f(x)$ είναι συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(x)$ με την ιδιότητα: $g'(x) = f(x)$

για κάθε x.

Συνεπώς, το $g(\beta) - g(\alpha)$ ισούται με τη διαφορά:

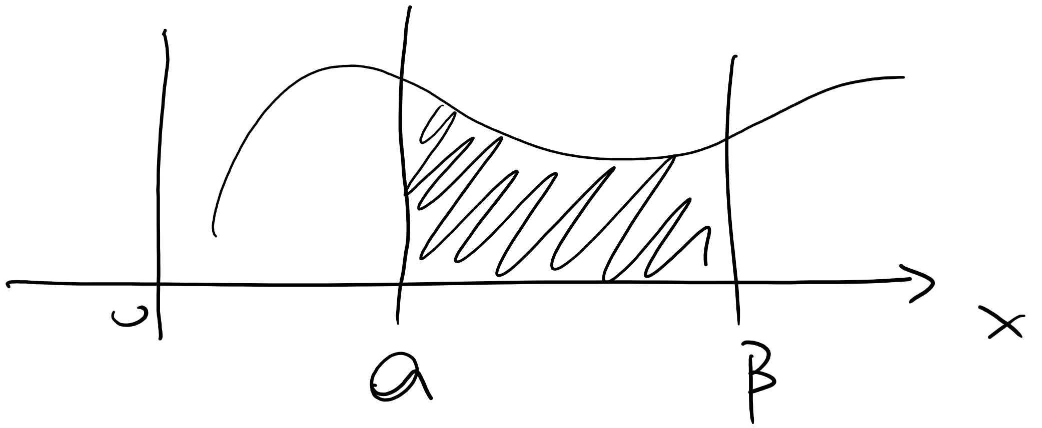
το εμβαδόν του του χωρίου

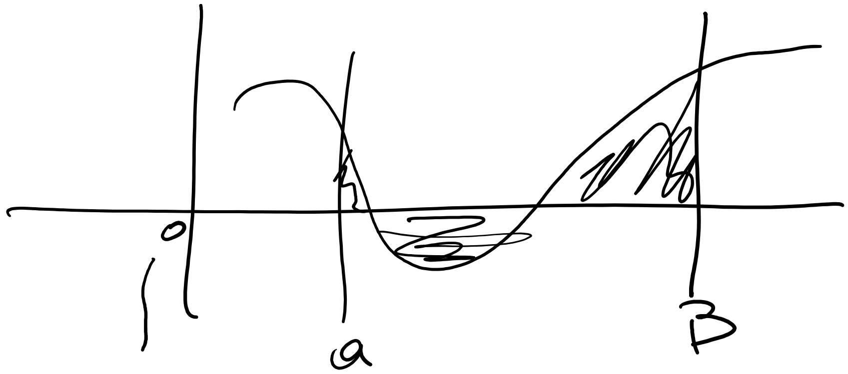
$$\{(x,y) : x \in [\alpha, \beta],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

μείον

το εμβαδόν του χωρίου:

$$\{(x,y) : x \in [\alpha, \beta],\ f(x) \leq y \leq 0\}$$





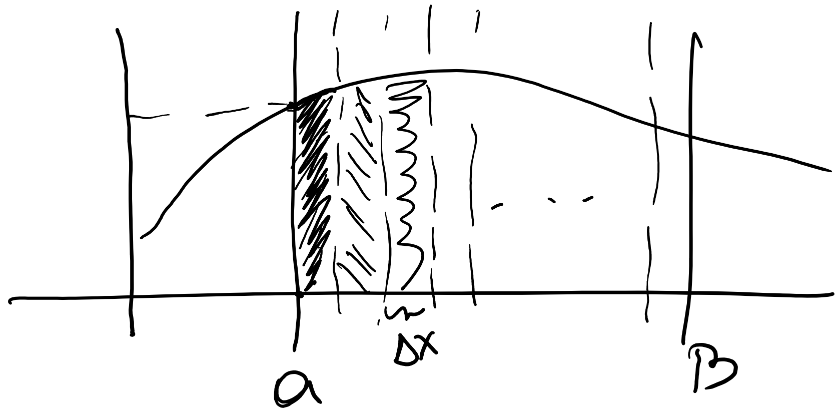
Το ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Πρώτα ορίζουμε το εμβαδόν του χωρίου X που περιορίζεται από το γράφημα μιας συνεχούς θετικής συνάρτησης $f(x)$ ορισμένης στο $[\alpha,\beta]$, και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=0$, δηλ.

$$X = \{(x,y) : x\in[\alpha,\beta],\ 0\le y\le f(x)\}$$

Χωρίζουμε το $[\alpha,\beta]$ σε ν-ίσα διαστήματα μήκους $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ το καθένα, ως εξής:

$$[\alpha,\beta]=[\alpha,\alpha+\Delta x]\cup[\alpha+\Delta x,\alpha+2\Delta x]\cup\cdots$$
$$\cdots[\alpha+(\nu-1)\Delta x,\alpha+\nu\Delta x]$$



Μπορούμε να δούμε το άθροισμα

$$E_\nu=\sum_{k=1}^{\nu}f(x_k)\cdot\Delta x$$

είναι μια προσέγγιση του εμβαδού του X όπου x_k τυχόν σημείο του k διαστήματος δηλ. $x_k\in[\alpha+(k-1)\Delta x,\alpha+k\Delta x]$

για $k = 1, 2, \ldots, n$.

Παρατηρούμε ότι όσο το n μεγαλώνει τόσο το E_n προσεγγίζει καλύτερα το εμβαδόν του χωρίου.

(*) Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{n \to \infty} E_n$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Ο αριθμός αυτός είναι το εμβαδόν του χωρίου X.

(*) Αν η $f(x)$ είναι τυχαία συνάρτηση ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ (όχι κατ' ανάγκη θετική), τότε όταν $n \to \infty$, το E_n τείνει στην τιμή: $E = E_+ - E_-$,

όπου: E_+ το εμβαδόν του χωρίου

$$X_+ = \{(x,y) : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

και E_- το εμβαδόν του χωρίου:

$$X_- = \{(x,y) : x \in [\alpha,\beta],\ f(x) \leq y \leq 0\}.$$

Την τιμή E την ονομάζουμε <u>ορισμένο ολοκλήρωμα</u> της $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, και συμβολίζουμε με:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

<u>Πχ</u> $\int_0^1 x^2 dx$ είναι το εμβ. του χωρίου.

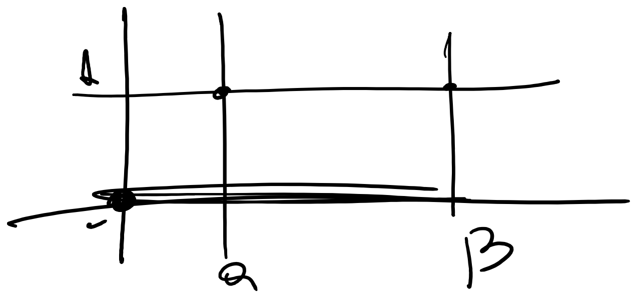
$$\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$$

<u>Πχ</u> Αν: $f(x) = \begin{cases} 1-x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1+x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

τότε: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 3$

πχ) Σταθερή συνάρτηση $f(x)=1$

Τότε: $\int_a^\beta f(x)dx = \beta - a$



πχ) Προφανώς: $\int_a^a f(x)dx = 0$

κ' $\int_a^\beta 0\,dx = 0$.

P2

Τετάρτη, 24 Νοεμβρίου 2021 12:18 μμ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Αν $f(x)$, $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

1) $$\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)+g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

2) $$\int_{\alpha}^{\beta}k f(x)dx = k\cdot\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$, k- σταθερά

3) $$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx = \int_{\alpha}^{c}f(x)dx + \int_{c}^{\beta}f(x)dx$$, όπου $\alpha \le c \le \beta$

4) $$m(\beta-\alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \le M(\beta-\alpha)$$

όταν: $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$

$\boxed{\text{Πχ}}$ i) $$\int_{\alpha}^{\beta} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}$$

β $\quad {}^{k+1}\big]^{\beta}$ $\quad \beta^{k+1}$ $\quad \alpha^{k+1}$

ii) $\int_{\alpha}^{\beta} x^{k} dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^{k+1}}{k+1} - \frac{\alpha^{k+1}}{k+1}$

iii) $\int_{\alpha}^{\beta} e^{x} dx = \left[e^{x}\right]_{\alpha}^{\beta} = e^{\beta} - e^{\alpha}$

iv) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \left[\log x\right]_{\alpha}^{\beta} = \log\beta - \log\alpha$

v) $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x}\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^{1/2} dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_{\alpha}^{\beta}$

vi) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^{-1/2} dx = \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_{\alpha}^{\beta}$

vii) $\int_{\alpha}^{\beta} 1 \cdot \log x\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} x' \cdot \log x\, dx =$

$= \left[x \cdot \log x\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} x\,(\log x)'\, dx$

$= \beta \quad \int^{\beta}$

$$= \left[x \lg x\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[x \lg x\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} dx$$

$$= \left[x \lg x\right]_{\alpha}^{\beta} - \left[x\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= \left(\beta \lg \beta - \alpha \lg \alpha\right) - \left(\beta - \alpha\right)$$

$$= \left(\beta \lg \beta - \beta\right) - \left(\alpha \lg \alpha - \alpha\right).$$

P3

Τετάρτη, 24 Νοεμβρίου 2021 12:37 μμ

Ορ.) Μια τ.μ. καλείται συνεχής αν μη αρνητική συνάρτηση $f(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

τ.ω. για $\alpha < \beta$:

$$P(\alpha < X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Η $f(x)$ καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.).

↳ $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$

για $-\infty < x < \infty$.

↳ Αν η $f(x)$ συνεχής στο x, τότε:

$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

$$\overline{dx} = f(x).$$

↳ Η $f(x)$ <u>δεν</u> παριστάνει την πιθανότητα κάποιου ενδεχομένου.

Ισχύει: $P(X=x) = \int_x^x f(z)\,dz = 0.$

Συμβατικά, κατά προσέγγιση

$$P(x \le X < x+h) = f(x)\cdot h \text{ για μικρό } h.$$