PL
Παρασκευή, 12 Νοεμβρίου 2021 3:10 μμ

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Η συνάρτηση

$$F(x) = P(X \le x) =$$

$$= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}), -\infty < x < \infty$$

ονομάζεται <u>συνάρτηση κατανομής</u> ή <u>αθροιστική συνάρτηση κατανομής</u>.

Εναλλακτικά, γράφουμε: $F_X(x)$.

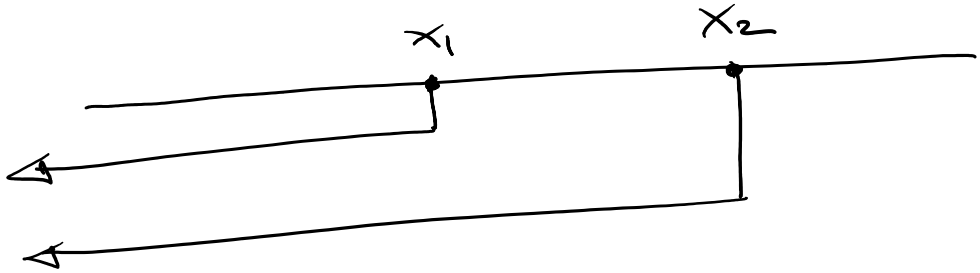
Ισχύει:

↳ $0 \le F(x) \le 1$

↳ Αύξουσα: $F(x_1) \le F(x_2)$

για $-\infty < x_1 \le x_2 < \infty$

<u>αφού</u>: $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x_1\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x_2\}$



$F(-\infty) = \lim F(x) = 0$

↳ Έχουμε: $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \ldots$

↳ Αντίστοιχα: $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

αφού $\lim_{x \to \infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> Έστω $F(\cdot)$ σ.κ. μιας τ.μ. X.

Τότε: $P(\alpha < X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ για κάθε $\alpha < \beta$.

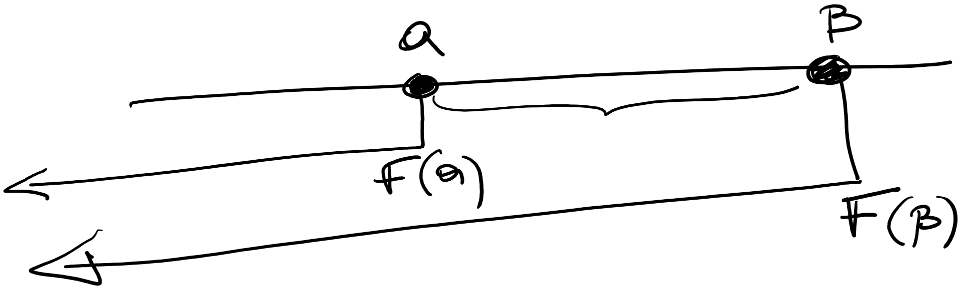
Ενδεχόμενο: $\{\omega \in \Omega : \alpha < X(\omega) \leq \beta\}$

είναι διαφορά δύο ενδεχομένων:

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \beta\} - \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\}$

με $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \beta\}$

Οπότε, σύμφωνα με τον: $P(A-B) = P(A) - P(B)$ για $B \subseteq A$



παίρνουμε το ζητούμενο.

P2

Παρασκευή, 12 Νοεμβρίου 2021 3:52 μμ

ΠΧ) Πείραμα: Ρίψη ζαριού

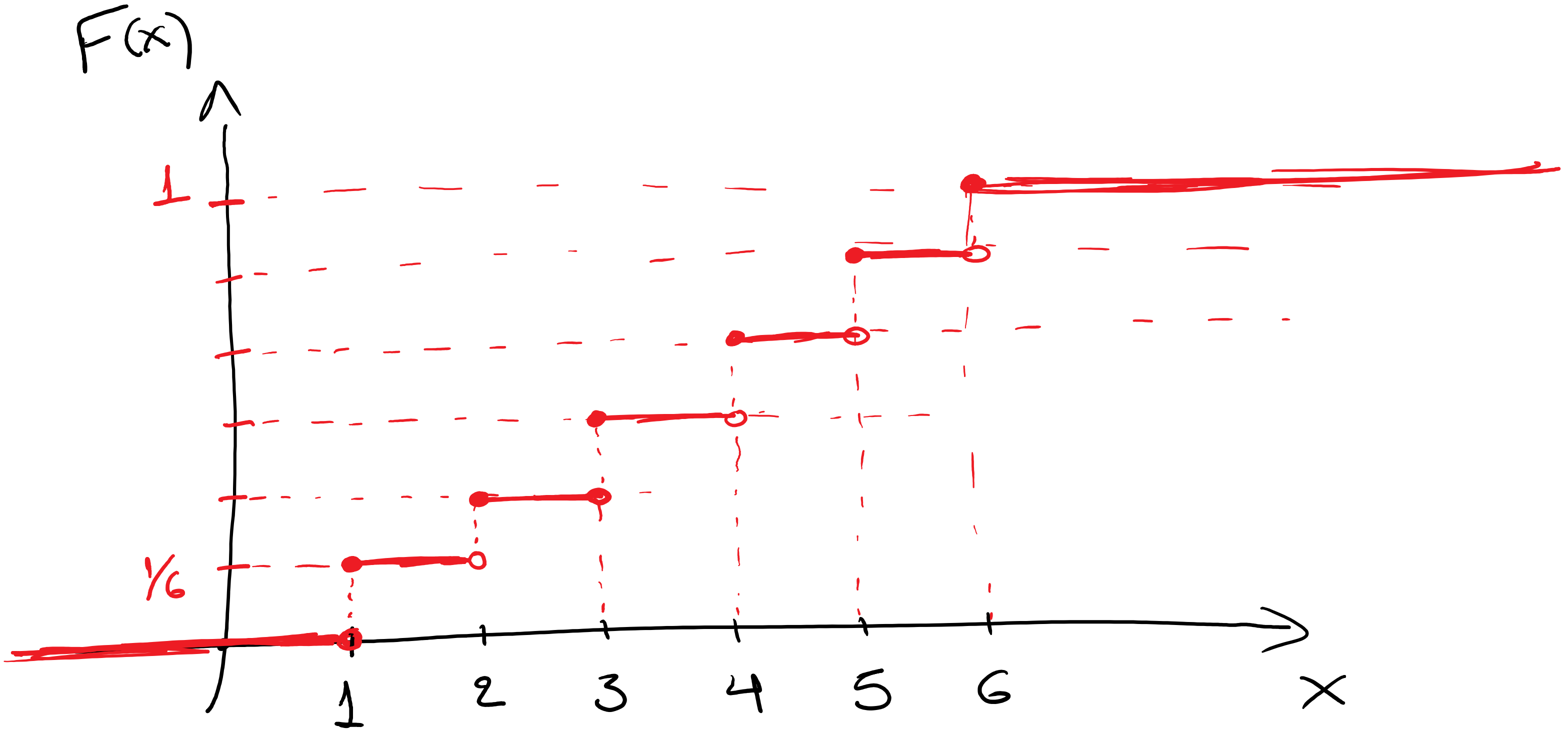
Η τ.μ. είναι η ταυτοτική συνάρτηση

$$\underline{X}(\omega)=\omega \ , \ \omega\in\underline{\Omega} .$$

$$\{\omega\in\underline{\Omega} : \underline{X}(\omega)\le x\} = \begin{cases} \emptyset & , -\infty < x < 1 \\ \{1\} & , 1\le x<2 \\ \{1,2\} & , 2\le x<3 \\ \{1,2,3\} & , 3\le x<4 \\ \{1,2,3,4\} & , 4\le x<5 \\ \{1,2,3,4,5\} & , 5\le x<6 \\ \underline{\Omega} & , 6\le x<\infty \end{cases}$$

$$F(x)=P(\underline{X}\le x) = \begin{cases} 0 & , -\infty<x<1 \\ 1/6 & , 1\le x<2 \\ 2/6=1/3 & , 2\le x<3 \\ 3/6=1/2 & , 3\le x<4 \\ 4/6=2/3 & , 4\le x<5 \\ 5/6 & , 5\le x<6 \\ 1 & , 6\le x<\infty \end{cases}$$

$1 \quad , \; 6 \leq x < \infty$



ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια τ.μ. καλείται διακριτή αν παίρνει αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή άπειρο) σύνολο τιμών.

$$R_X = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots\}.$$

Η $f(\cdot)$ για κάθε σημείο x_k, $k=0,1,2,\dots$ εκφράζει την πιθανότητά του, δηλ.

$$f(x_k) = P(X = x_k) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}) \quad k=0,1,\dots$$

και καλείται συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X

Έχουμε:

↳ $f(x_k) = P(X = x_k) \geq 0$, $k=0,1,2,\dots$

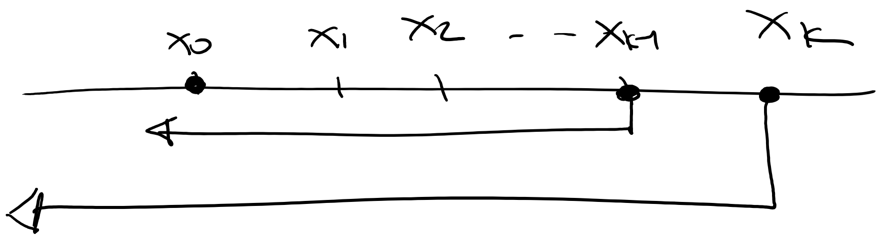
και $f(x) = 0$, $x \notin R_X$

↳ $\sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = x_k) = 1$.

↳ Αν: $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$, τότε

- $f(x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1})$.

με: $f(x_0) = F(x_0)$.



↳ Γενικά: $F(x) = \sum_{x_k \le x} f(x_k)$

$$= \sum_{x_k \le x} P(X = x_k).$$

ή $F(x_k) = \sum_{j=0}^{k} P(X = x_j)$

όπου: $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια τ.μ. Χ είναι συνεχής αν ∃ μη αρνητική συνάρτηση $f(x) \ge 0$, $-\infty < x < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

όπου $f(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας