P1

Τετάρτη, 10 Νοεμβρίου 2021 11:12 πμ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ Έστω Ω ΔΧ και

$A, B \subseteq \Omega$. Τότε A, B στοχ. ανεξάρτητα αν ισχύει

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

πχ) Ρίχνω ζάρι δύο διαδοχικές φορές

A_1: εμφάνιση άρτιου στη πρώτη ρίψη

A_2: -"- -"- στη δεύτερη -"-

A_3: άθροισμα άρτιο.

Ο ΔΧ $\Omega = \{(1,1),(1,2), \ldots, (6,6)\}$

Έχουμε: $N(\Omega) = 6^2 = 36$ ισοπίθανα δειγματικά σημεία.

$$A_1 = \{(2,1),(2,2), \ldots, (4,1),(4,2), \ldots, (6,1),(6,2), \ldots, (6,6)\}$$

$$A_2 = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,2), \ldots, (6,6)\}$$

$$A_3 = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6), \ldots, (6,6)\}$$

και: $A_1A_2 = A_1A_3 = A_2A_3 = A_1A_2A_3 =$

$= \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

με $N(A_1A_2) = 9$

Οπότε: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

κι' $P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4}.$

Οπότε: $P(A_1A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2)$

$P(A_1A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_3)$

$P(A_2A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_2) \cdot P(A_3)$

Όμως:

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}_{1/8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Συνεπώς είναι ανά δύο ανεξάρτητα αλλά

όχι πλήρως ανεξάρτητα!

P2

Τετάρτη, 10 Νοεμβρίου 2021 11:56 πμ

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Έστω $\underline{\Omega}_1$ κ' $\underline{\Omega}_2$ οι ΔΧ δύο πειραμάτων σε μια διαδοχική ή ταυτόχρονη εκτέλεσή τους.

Έχουμε:

$$\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \underline{\Omega}_1 \text{ κ' } \omega_2 \in \underline{\Omega}_2\}$$

Αν έχουμε: $\underline{\Omega}_1 = \underline{\Omega}_2 = \underline{\Omega}$, τότε:

$$\underline{\Omega}^2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \underline{\Omega},\ i = 1, 2\}$$

ΠΧ | Τα κύτταρα έχουν δύο γονίδια A, a

Έστω οι γονότυποι: AA, Aa, aa

εμφανίζονται με πιθ: p, $2q$, r

όπου: $p + 2q + r = 1$

Έστω: A_1, A_2, A_3 τα ενδεχόμενα το αρσενικό άτομο να έχει γονότυπο AA, Aa, aa, και αντίστοιχα

B_1, B_2, B_3 για το θηλυκό άτομο.

Επίσης, θεωρούμε τα ενδεχόμενα A κ' B όπου ο απόγονος κληρονομεί γονίδιο A από τον πατέρα και τη μητέρα αντίστοιχα.

$$P(A) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} P(A_1) \cdot P(A|A_1) + P(A_2) \cdot P(A|A_2) + P(A_3) P(A|A_3)$$

$$= p \cdot 1 + 2q \frac{1}{2} + r \cdot 0 =$$

$$= p + q$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - (p+q)$$

$$= q + r$$

Ομοίως: $P(B) = p + q$

$$P(B') = 1 - (p+q) = q + r$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ όπου ο απόγονος έχει AA, Aa, aa. Άρα:

$$\Gamma_1 = A \cap B = AB$$

$$\Gamma_2 = (AB') \cup (A'B)$$

$$\Gamma_3 = A'B'$$

Επομένως:

$$p^*$$

$$P(\Gamma_1) = P(AB) = P(A) \cdot P(B) = (p+q)^2 = p^{*2}$$

$$P(\Gamma_2) = P(AB' \cup A'B) = P(AB') + P(A'B)$$

$$= 2(p+q) \cdot (q+r) = 2p^*q^*$$

$$P(\Gamma_3) = P(A'B') = (q+r)^2 = q^{*2}$$

$$q^*$$

Θηλ.

Αρσεν.

	$A\ (p^*)$	$a\ (q^*)$
$A\ (p^*)$	AA p^{*2}	Aa $p^* \cdot q^*$
$a\ (q^*)$	aA $q^* \cdot p^*$	aa q^{*2}

$a(q)$ | $q^* \cdot p^*$ | q^{*2}

AA – $P(AA) = p^{*2}$

Aa – $P(Aa) = 2p^*q^*$

aa – $P(aa) = q^{*2}$

Hardy-Weinberg Equilibrium

P3

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ – ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Ορισμός | Έστω πείραμα τύχης με Δ.Χ. Ω.
Μια πραγματική συνάρτηση X που ορίζεται στο Ω και είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) όπου

$$X(\omega) = x$$

αντιστοιχεί σε κάθε ω έναν πραγματικό αριθμό.

Το σύνολο $\mathbb{R}_X \subseteq \mathbb{R}$ των τιμών της τ.μ. X είναι ο "νέος" Δ.Χ. του πειράματος.

(*) Το $(-\infty, x]$ είναι βασικό ενδεχόμενο του Δ.Χ. Κάθε άλλο ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}_X$ εκφράζεται μέσω τέτοιων διαστημάτων.