HM - math – Διάλεξη (β', 12/Μαρ./2024)

Κοσμάς Λ. Τσακμακίδης

Επίκ. Καθηγητής

(http://www.ktsakmakidis.com/)

1837 2017 ΧΡΟΝΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Άρα το φορτίο dQ που εξέρχεται από τον κύλινδρο σε χρόνο dt είναι:

$$dQ = qnAv_d dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} = I = nqv_d A}$$

Μπορούμε να ορίσουμε πυκνότητα ρεύματος:

$$\boxed{J = \frac{I}{A} = nqv_d} \; [A/m^2]$$

Διανυσματικά: $\boxed{\vec{J} = nq\vec{v}_d}$

Παράδειγμα: Σε χάλκινο σύρμα διαμέτρου 1.02 mm, ρέει ρεύμα 1.67 A (π.χ. για λάμπα 200 W). Αν $n = 8.5\times10^{28}$ ηλεκτρόνια$/m^3$ να βρεθεί η v_d.

$$v_d = \underbrace{\frac{I}{A}}_{J}\frac{1}{nq} = \frac{1.67\,A}{8.17\times10^{-7}\,m^2}\cdot\frac{1}{8.5\times10^{23}\times(1.6\times10^{-19}\,C)}$$

$$\left[A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi\times(1.02\times10^{-3})^2}{4}\,m^2 = 8.17\times10^{-7}\,m^2\right]$$

και τελικά $v_d = 1.5\times10^{-4}\,\frac{m}{s} = 0.15\,\frac{mm}{s}$.

Ειδική αντίσταση

$$\rho = \frac{E}{J}$$

E — μέτρο της έντασης του ηλ. πεδίου

J — μέτρο της πυκνότητας ρεύματος.

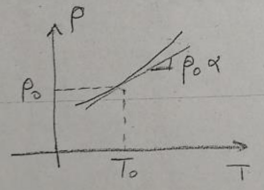
Ειδική αντίσταση ↗ καθώς θερμοκρασία T ↗

[Τα ιόντα ταλαντώνονται με μεγαλύτερο πλάτος
⇒ αυξάνεται η πιθανότητα σύγκρουσης ηλ/νίων-ιόντων]

$$\rho \cong \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0) \right]$$

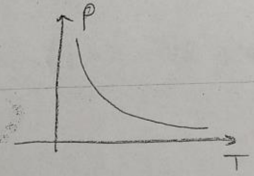
ρ_0: ειδ. αντίσταση για $T = T_0$
[$T_0 = 0$ ή $20^\circ C$]

α: θερμικός συντελεστής ειδ. αντίστασης.



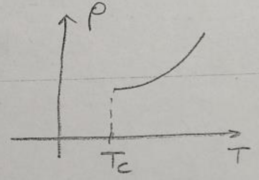
μέταλλο

$\rho(T)$ ↗



Ημιαγωγός

$\rho(T)$ ↘



Υπεραγωγός

$\rho = 0$ για $T < T_c$

Αντίσταση

Για αγωγό: $\boxed{\vec{E} = \rho \vec{J}}$ → Ohm

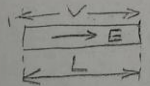
$\underbrace{I = J \cdot A}$ ρεύμα vs. πυκν. ρεύματος

$\underbrace{V = E \cdot L}$ τάση μεταξύ άκρων

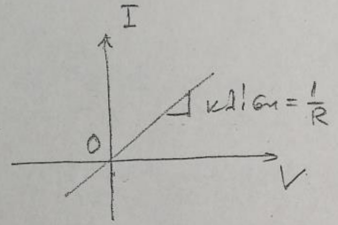
$$\Rightarrow \frac{V}{L} = \rho \frac{I}{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \left(\rho \frac{L}{A}\right) I$$

R: αντίσταση

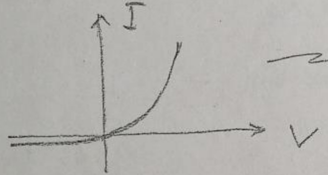


$$\Rightarrow \boxed{V = RI}$$



$V = RI \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{R} V}$

κλασσικός "αντιστάτης" με αντίσταση R.

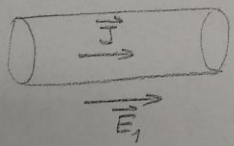


ημιαγωγική δίοδος.
Για μικρές τιμές της $V > 0$
$I \sim V^2 \rightarrow$ <u>δεν</u> υπακούει το νόμο του Ohm.

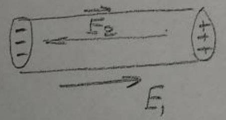
<u>Ηλεκτρεγερτική δύναμη</u> (ΗΕΔ).

▷ Για να διαρρέεται ένας αγωγός από <u>σταθ. ρεύμα</u> πρέπει να αποτελεί μέρος <u>κλειστού βρόχου</u>
$\Rightarrow$ <u>κλειστού κυκλώματος</u>.

▷ Αν δεν ήταν έτσι, αν εφαρμόζαμε ηλ. πεδίο $\vec{E}_1$ θα άρχιζε να ρέει ρεύμα $\vec{J} = \frac{\vec{E}_1}{\rho}$



$\Rightarrow$ συσσωρεύονται θετικά φορτία στο ένα άκρο και αρνητικά στο άλλο άκρο



$\Rightarrow$ δημιουργείται ένα πεδίο $\vec{E}_2$ που μειώνει το $\vec{E}_1$

$\Rightarrow$ μειώνεται το $\vec{J}$ (ή το I)

Το σύστημα έρχεται σε ισορροπία: $\vec{E}_{ολ} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{J} = 0$

<u>Άρα</u>: για να υπάρξει σταθερό ρεύμα σε αγωγό πρέπει: α) να έχουμε ένα κλειστό βρόχο (κύκλωμα)

β) —"— ένα τμήμα στο κύκλωμα (<u>πηγή</u>):

→ να αυξάνει τη δυν. ενέργεια των φορέων έτσι ώστε να κινηθούν από χαμηλό σε υψηλό δυναμικό.

* όπως σε ένα <u>συντριβάνι</u>:

▷ Το νερό ρέει από το στόμιο στην κορυφή και πέφτει κινούμενο προς την κατ/ση της <u>μείωσης</u> <u>της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας</u>

▷ Χρειάζεται μία αντλία ώστε το νερό να ανέβει προς τα πάνω <u>αυξάνοντας</u> <u>τη δυν. ενέργεια</u>

* <u>Στο κλειστό κύκλωμα</u>:

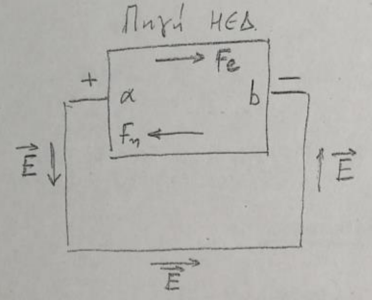
Η αιτία που κινεί τα φορτία από χαμηλότερο σε υψηλότερο δυναμικό λέγεται <u>ΗΕΔ</u>	Ε

▷ Η ΗΕΔ <u>δεν</u> είναι δύναμη αλλά ~ <u>δυναμικό</u> [μονάδες: <u>V</u>]

▷ Στοιχεία που παρέχουν ΗΕΔ:

- μπαταρίες
- ηλιακά στοιχεία
- γεννήτριες ηλ. ρεύματος
- θερμοζεύγη
- ...

Ιδανική ΗΕΔ: διατηρεί σταθ. διαφορά δυναμικού <u>ανεξάρτητα</u> από το ρεύμα



Πηγή ΗΕΔ σε κλειστό βρόχο:

▷ Ο α (+) έχει υψηλότερο δυναμικό από τον ακροδέκτη b (−).

▷ Στο κύκλωμα σχηματίζεται ηλ. πεδίο $\vec{E}$ από το + στο −.

▷ Κάθε φορτίο q υφίσταται δύναμη $\vec{F}_e = q\vec{E}$.

▷ Η πηγή παρέχει μία επιπλέον επίδραση: μη ηλεκτροστατική δύναμη $\vec{F}_n$ που ωθεί τα φορτία από το − στο +

▷ Αν θετικό φορτίο κινείται από το b στο α στο εσωτερικό της πηγής: $W_n = q\mathcal{E}$

⇒ η δυναμική ενέργεια του φορτίου <u>αυξάνεται</u> κατά qV_{ab} ($V_{ab} = V_a - V_b$)

▷ Στην ιδανική πηγή ΗΕΔ: $F_e = F_n$

(ίσα μέτρα, αντίθετες κατ/σεις) ⇒ ολικό έργο = 0.

[όπως αν υψώσεις ένα σώμα σε ύψος h με σταθ. ταχύτητα ⇒ αυξάνεται η δυν. ενέργεια, κιν. ενέργεια = σταθ.]

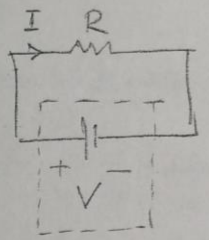
<u>Ιδανική πηγή ΗΕΔ:</u>

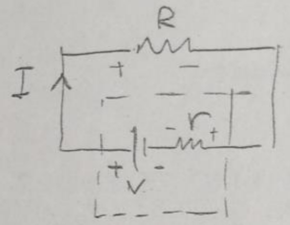
$$\left.\begin{array}{l}\boxed{V_{ab} = \mathcal{E}} \\ V_{ab} = IR\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{E} = IR$$

<u>"Ρεαλιστική" πηγή ΗΕΔ</u>

$$\boxed{V_{ab} = \mathcal{E} - I\underset{\text{εσωτ. αντίσταση}}{r}}$$

Ιδανική πηγή ΗΕΔ





Πραγματική πηγή ΗΕΔ

$V = \mathcal{E} = IR$

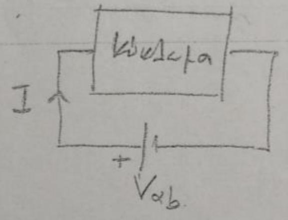
και $\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R}}$

$V = \mathcal{E} - Ir = IR \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}}$

{ Συζήτηση για $\underbrace{\text{αμπερόμετρα}}_{\downarrow\ \text{σε σειρά}}$ – $\underbrace{\text{βολτόμετρα}}_{\downarrow\ \text{παρ/λα.}}$ }

<u>Ισχύς σε κύκλωμα</u>: $\boxed{P = V_{ab} I}$



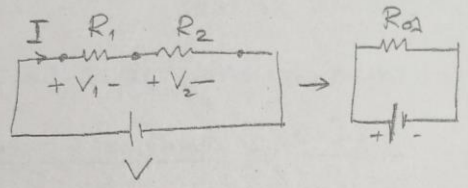
Αν έχουμε αντίσταση

$$\left.\begin{aligned} P &= V_{ab} I \\ V_{ab} &= RI \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P = I^2 R = \frac{V_{ab}^2}{R}}$$

Κυκλώματα συνεχούς ρεύματος

Αντιστάσεις σε σειρά :

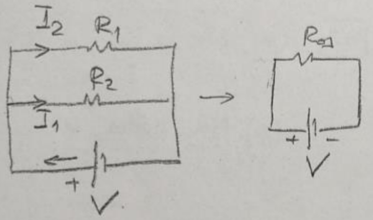


Ίδιο ρεύμα I

και $V_1 = R_1 I$
$V_2 = R_2 I$ | Επίσης : $V = V_1 + V_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 + V_2 = (R_1 + R_2) I = V \Rightarrow V = I R_{ολ}$, $\boxed{R_{ολ} = R_1 + R_2}$

Αντιστάσεις παρ/λα.



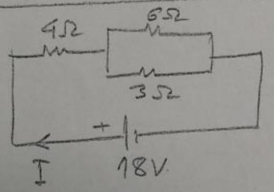
Ίδια τάση V.

και $V = R_1 I_1$
$V = R_2 I_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} I_1 = \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2} \\ \text{και} \quad I = I_1 + I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Δικτύωμα αντιστάσεων



▸ 6//3 : $\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}\,\Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow R_{ολ} = 2\Omega$

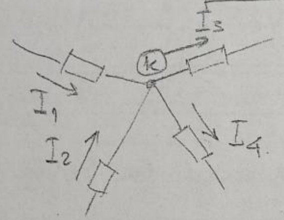
▸ 4 - σε σειρά με $R_{ολ}$:

$4 + 6//3 = 6\Omega$

▸▸ - Και να βρεθούν τα ρεύματα και οι τάσεις σε κάθε αντίσταση.

Νόμοι του Kirchhoff.

▷ Νόμος ρευμάτων : $\boxed{\sum_k I_k = 0}$

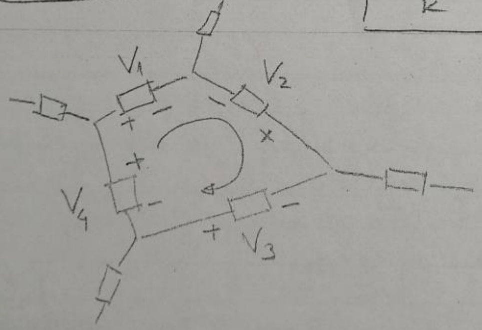


(k) : $\underbrace{I_1 + I_2}_{+} - \underbrace{I_3 - I_4}_{-} = 0$

μπαίνει στον (k) : πρόσημο (+)

βγαίνει από τον (k) : —||— (−)

▷ Νόμος τάσεων : $\boxed{\sum_k V_k = 0}$

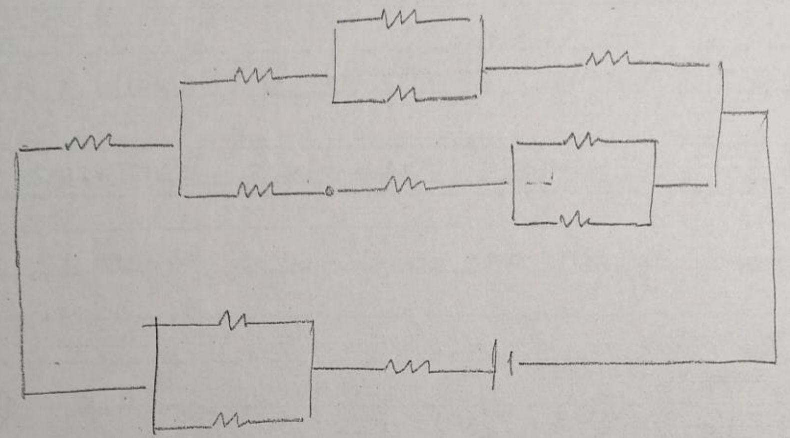


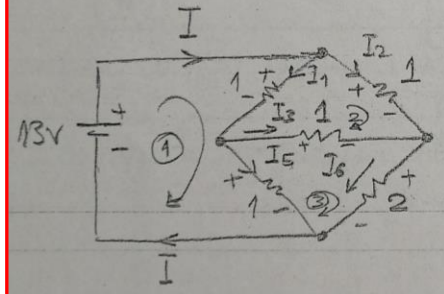
$\underbrace{V_1}_{+} - \underbrace{V_2 - V_3 - V_4}_{-} = 0$

Το αριστερόστροφο βέλος (βροχικό ρεύμα)

{ βλέπει + ⇒ τάση +
  —||— − ⇒ —||— −

Γενικοί κανόνες.





KVL 1:

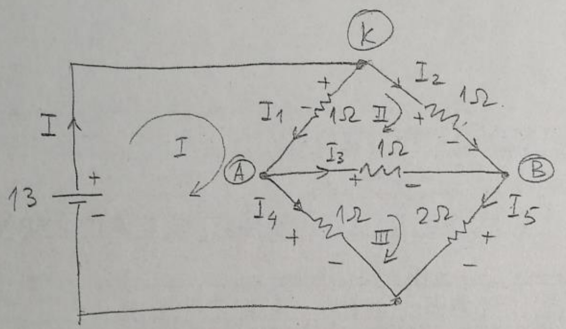
$$-13 + I_1 \cdot 1 + I_5 \cdot 1 = 0 \Rightarrow 13 = I_1 + I_5 \cdot 1$$

KVL 2:

$$-I_3 \cdot 1 - I_1 \cdot 1 + I_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot I_2 = 1 \cdot I_1 + I_3 \cdot 1$$

KVL 3



KVL στον I: $-13 + I_1 \cdot 1 + I_4 \cdot 1 = 0$

KCL στον A: $I_1 - I_3 - I_4 = 0 \Rightarrow I_4 = I_1 - I_3$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{13 - I_1 \cdot 1 - (I_1 - I_3) \cdot 1 = 0}$ (1)

KVL στον II: $\boxed{I_2 \cdot 1 - I_3 \cdot 1 - I_1 \cdot 1 = 0}$ (2)

KVL στον III: $I_5 \cdot 2 - I_4 \cdot 1 + I_3 \cdot 1 = 0$

KCL στον Ⓑ: $I_2 + I_3 - I_5 = 0 \Rightarrow I_5 = I_2 + I_3$

Επίσης $I_4 = I_1 - I_3$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{(I_2 + I_3) \cdot 2 - (I_1 - I_3) \cdot 1 + I_3 \cdot 1 = 0}$ (3)

(1): $-I_1 - I_1 + I_3 = 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{-2I_1 + I_3 = 13}$ (4)

(2): $\boxed{I_2 - I_3 - I_1 = 0}$ (5)

(3): $2I_2 + 2I_3 - I_1 + I_3 + I_3 = 0 \Rightarrow \boxed{-I_1 + 4I_3 + 2I_2 = 0}$ (6)

(4): $\underline{I_3 = 13 + 2I_1}$ (0)

(5): $-\underline{I_1} + I_2 - 13 - \underline{2I_1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{-3I_1 + I_2 - 13 = 0}$ (A)

(6): $-I_1 + 4\times 13 + 4\times 2I_1 + 2I_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{7I_1 + 2I_2 + 52 = 0}$ (B)

$$\left.\begin{array}{l}(A): -6I_1 + \cancel{2I_2} - 26 = 0 \\ (B): -7I_1 - \cancel{2I_2} - 52 = 0\end{array}\right\} (+)$$

$\Rightarrow -13I_1 = -78 \Rightarrow \boxed{I_1 = 6A}$

Επίσης (A): $-3\times 6 + I_2 - 13 = 0 \Rightarrow$

$-18 - 13 + I_2 = 0 \Rightarrow \boxed{I_2 = 31A}$

(0): $I_3 = 13 + 2I_1 \Rightarrow I_3 = 13 + 2\times 6 = 13 + 12 \Rightarrow \boxed{I_1 = 25A}$

Άρα από KCL στον (k):

$I - I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2 = 6 + 31 = 37A$

??

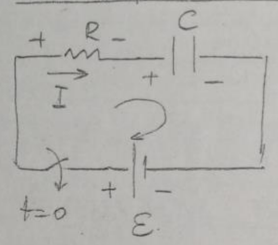
$\boxed{I_1 = 6A}$

$\boxed{I_2 = 5A}$

$I_1 + I_2 = I = 11\ A$

$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{13V}{11A} = 1.2\,\Omega$

Κύκλωμα RC



Αρχικά: $q = 0$

KVL: $-\mathcal{E} + V_R + V_C = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_R + V_C = \mathcal{E}$

$V_C = \dfrac{q}{C}$ και $V_R = RI = R\dfrac{dq}{dt}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E} \quad (1)$$

Αρχικά: $q(t=0) = 0$ και $\mathcal{E} = RI \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R}$

Τελικά: $(t \to \infty)$ $I \to 0 \Rightarrow \dfrac{dq}{dt} \to 0 \Rightarrow \boxed{q = \mathcal{E}C} = Q$

$$(1): \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{1}{RC}q = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}dt \Rightarrow \int_0^q \frac{dq'}{q' - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt'$$

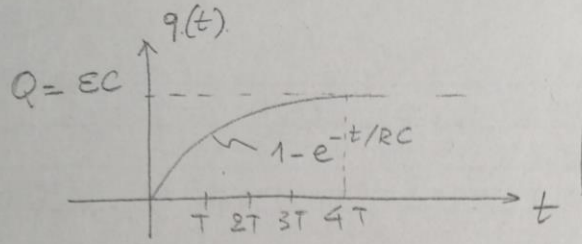
ΔΔ $q' - C\mathcal{E} = q'' \Rightarrow dq' = dq''$

και $\begin{cases} q' = 0 \Rightarrow q'' = -C\mathcal{E} \\ q' = q \Rightarrow q'' = q - C\mathcal{E} \end{cases}$

$$\int_{-C\mathcal{E}}^{q - C\mathcal{E}} \frac{dq''}{q''} = -\frac{1}{RC}t \Rightarrow \ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{1}{RC}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow q - C\mathcal{E} = -C\mathcal{E}e^{-t/RC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})}$$



$$\boxed{q(t)=\underbrace{\varepsilon C}_{Q}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

$T = RC$: σταθερά χρόνου

Για $t=4T$: $q(t) \approx \varepsilon C\,(1-e^{-4})$
και $e^{-4} \approx 0.018$

$\Rightarrow$ απέχουμε $\approx 2\%$ από την τελική τιμή $q=\varepsilon C$

Ρεύμα στον αντιστάτη

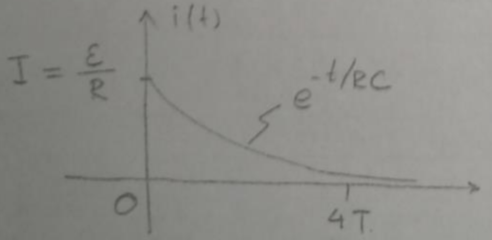
$$\varepsilon = \underbrace{R\frac{dq}{dt}}_{RI} + \frac{1}{C}q$$

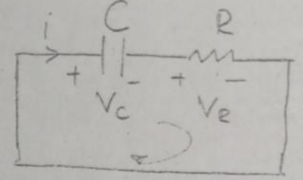
Αρχικά (t=0): $q=0 \Rightarrow \varepsilon = RI$
$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}$

Τελικά ($t\to\infty$): $q \to \frac{\varepsilon}{C}$
και $\frac{dq}{dt} \to 0$
$\Rightarrow I \to 0$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon C - \varepsilon C e^{-t/RC}\right)$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$





Εκφόρτιση πυκνωτή

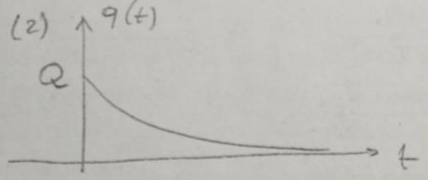
- Απομακρύνουμε την πηγή.
- Αρχικά $q = Q$

KVL: $V_C + V_R = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C}q + R\frac{dq}{dt} = 0}$ (1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_Q^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\frac{q}{Q} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q = Q e^{-t/RC}} \quad (2)$$



Ρεύμα στον αντιστάτη.

Αρχικά: $t \to 0$: $q = Q$ και (1) : $\frac{1}{C}Q + RI = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\frac{Q}{RC}} = I_0$$

Τελικά $t \to \infty$: $q = 0$ και (1) : $\boxed{I \to 0}$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{RC}e^{-t/RC}$$