Ηλεκτρομαγνητισμός (Math) – Διάλεξη 1^{η} (15/Φεβ./2024)

Κοσμάς Λ. Τσακμακίδης

Επίκ. Καθηγητής

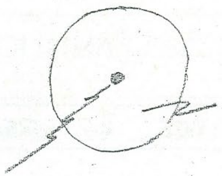
(http://www.ktsakmakidis.com/)

1837 2017 ΧΡΟΝΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Ηλεκτρική δύναμη – ηλεκτρικό φορτίο

▷ Η ύλη αποτελείται από άτομα → πυρήνας
→ ηλεκτρόνια



ακτίνα ατόμου ~ 10^{-10} m

διάμετρος πυρήνα
~ 6×10^{-15} m

▷ Άτομο ↔ "ηλιακό σύστημα"

↓

δύναμη που κρατάει τους πλανήτες
κοντά στον ήλιο :- βαρυτική δύναμη

▷ Στα άτομα: η δύναμη που κρατάει τα ηλεκτρόνια
κοντά στον πυρήνα: ηλεκτρική δύναμη

▷ Η ηλεκτρική δύναμη ↔ φορτία

∴ φορτία στάσιμα (ή κινούμενα πολύ αργά)

↓

ηλεκτροστατικές δυνάμεις

∴ φορτία κινούμενα με σταθ. (ή σχεδόν σταθ.) ταχύτητα

↓

μαγνητικές δυνάμεις

∴ Συνδυασμός ηλ/κών / μαγν. δυνάμεων

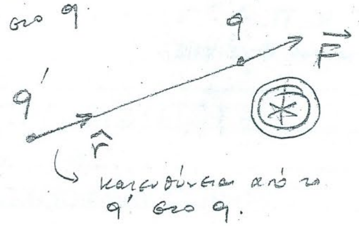
↓

Ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις

Νόμος Coulomb

δύναμη που ασκεί το q' στο q

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qq'}{r^2}\,\hat{r}}$$



- q, q': πολλαπλάσια του φορτίου ηλεκτρονίου

$$e = 1.6\times10^{-19}\ C$$

⇒ $\boxed{\text{Το ηλ. φορτίο είναι } \underline{\text{κβαντισμένο}} \text{ και ισχύει η } \underline{\text{αρχή διατήρησης του φορτίου}}}$

- ε_0: διηλεκτρική σταθερά.

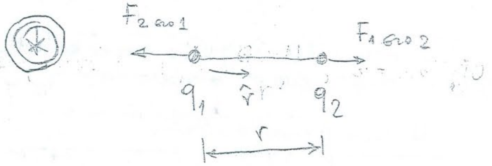
$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{N\cdot m^2} = \frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\ \frac{F}{m}$$

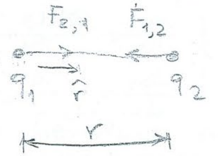
Συνδέεται με τη $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \frac{H}{m}$ και τη $c = 3\times10^8\ \frac{m}{s}$.

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{36\cancel{\pi}\times10^9}{4\cancel{\pi}\times10^{-7}}\ \frac{m^2}{s^2} = 9\times10^{16}\ \frac{m^2}{s^2} = c^2 \Rightarrow \boxed{c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \left[\frac{1}{\cancel{4\pi}\cdot\frac{1}{\cancel{36\pi}_{9}}\times10^{-9}}\right] \approx 9\times10^9\ \frac{N\cdot m^2}{C^2}$$

Δύναμη Coulomb
- ελκτική: $qq' < 0 \Rightarrow \vec{F} \parallel (-\hat{r})$
- απωστική: $qq' > 0 \Rightarrow \vec{F} \parallel \hat{r}$





Στο άτομο του υδρογόνου

δύναμη μεταξύ ηλεκτρονίου/πρωτονίου $\nearrow$ βαρυτική, $\searrow$ ηλεκτρική

Βαρυτική: $\boxed{F_G = G\,\dfrac{mM}{r^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} G = 6.67\times10^{-11}\ \dfrac{N\cdot m^2}{kg^2}\ ;\ \underline{r = 0.53\times10^{-10}\,m} \\ M = 1.67\times10^{-27}\,kg\ ,\ m_e = 9.11\times10^{-31}\,kg \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$F_G = 3.6\times10^{-47}\,N.$

Ηλεκτρική: $\boxed{F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{e^2}{r^2}}$

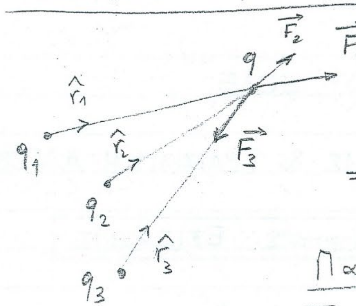
$$\left.\begin{array}{l} e = 1.6\times10^{-19}\,C\ ;\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\times10^{9}\ \dfrac{N\cdot m^2}{C^2} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$F_e = 8.2\times10^{-8}\,N.$

δηλ. 39 τάξεις μεγέθους ισχυρότερη από τη βαρυτική!

Επαλληλία ηλ/κών δυνάμεων

Σχόλια για το νόμο αντιστρόφου τετραγώνου

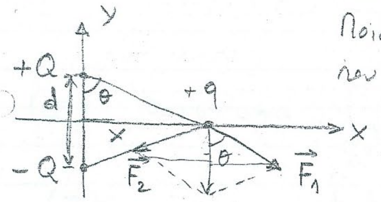


$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q}{r_2^2}\hat{r}_2 + \ldots$$

Παράδειγμα

Τα φορτία Q, −Q απέχουν d μεταξύ τους. Ποιά η ηλ. δύναμη που ασκείται στο q που βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο της ευθείας που ενώνει τα Q, −Q ?



∴ $F_1 = F_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ [ίσα μέτρα.]

∴ Οι x-συνιστώσες αλληλοαναιρούνται.

∵ Οι y-συνιστώσες:

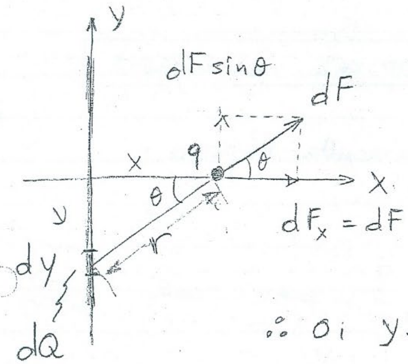
$$F_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{x^2 + d^2/4}\cos\theta - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{x^2 + d^2/4}\cos\theta$$

και $\cos\theta = \dfrac{d/2}{\left(x^2 + d^2/4\right)^{1/2}}$ οπότε $\boxed{F_y = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQd}{\left(x^2 + d^2/4\right)^{3/2}}}$

°° Αν το q πολύ μακριά από Q, −Q : $d^2 \ll x^2$ και $\left(x^2 + d^2/4\right)^{3/2} \approx x^3 \Rightarrow F \sim \dfrac{1}{x^3}$ δηλ. παρά το ότι η δύναμη από κάθε ±Q ~ $\left\{\begin{matrix}\text{αντίστροφο} \\ \text{τετράγωνο}\end{matrix}\right\}$, η συνισταμένη είναι διαφορετική [η δύναμη από το ένα τείνει να εξουδετερώσει από το άλλο]

Φορτίο είναι κατανεμημένο κατά μήκος μιας γραμμής με πυκνότητα ρ.

Πόση η ηλ. δύναμη που ασκείται σε φορτίο κοντά στη γραμμή?



$$\left.\begin{aligned} dF &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dQ}{r^2} \\ dQ &= \rho\, dy \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\rho\, dy}{r^2}$$

∴ Οι y-συνιστώσες από στοιχεία $\pm dQ$ αναιρούνται

∴ υπάρχει μόνο x-συνιστώσα.

$$dF_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\rho\, dy}{r^2}\cos\theta \Rightarrow \underbrace{F_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\rho\cos\theta}{r^2}\,dy}$$

Το ολοκληρώνουμε ως προς θ.

∴ Είναι $y = x\tan\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \frac{x}{\cos^2\theta} \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

∴ Επίσης: $x = r\cos\theta \Rightarrow r = \dfrac{x}{\cos\theta}$

Άρα: $$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\rho\cos\theta}{r^2}\,dy = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q\rho\int\frac{\cos\theta}{\left(\frac{x}{\cos\theta}\right)^2}\cdot\frac{x}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\rho}{x}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta}_{2} \Rightarrow \boxed{F_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q\rho}{x}}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο

▷ Ένα φορτισμένο σωματίδιο Α "τροποποιεί" (λόγω του φορτίου του) τον περιβάλλοντα χώρο, έτσι ώστε: ένα φορτισμένο σωματίδιο Β (λόγω του φορτίου του) "αισθάνεται" πως έχει τροποποιηθεί ο χώρος στη θέση που βρίσκεται ⇒ απόκριση: "αισθάνεται" τη δύναμη Coulomb.

▷ Αν ένα "δοκιμαστικό" φορτίο τοποθετηθεί σε ένα σημείο και υφίσταται ηλ. δύναμη ⇒ ∃ ηλ. πεδίο στο σημείο αυτό.

▷ Δύναμη: διάνυσμα ⇒ ηλ. πεδίο: διάνυσμα.

▷ Ορισμός ηλ. πεδίου: $\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$ (*) $\longrightarrow [E] = \frac{N}{C}$

▷ Αν ξέρουμε το $\vec{E}$ ⇒ βρίσκουμε το $\vec{F}$

(*) ▷ Από τον ορισμό: ηλ. πεδίο = δύναμη / θετικού φορτίου.

Ηλ. δύναμη: ίδια κατ/ση με το ηλ. πεδίο

Ηλ. δύναμη: αντίθετη κατ/ση με το ηλ. πεδίο

◈ $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ θυμίζει την $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$

↓

Βαρυτική δύναμη / μονάδα μάζας

Ηλ. πεδίο φορτισμένου σωματιδίου

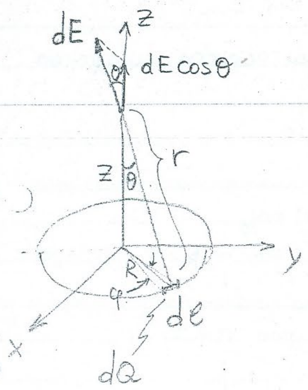
∴ Δύναμη από ηλ. φορτίο q στο ηλ. φορτίο q':

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qq'}{r^2}\,\hat{r}$$

⇒ Ηλ. πεδίο που δημιουργείται από το q σε απόσταση r:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\hat{r}} \rightarrow \boxed{\text{πεδίο σημειακού φορτίου}}$$

∴ <u>Παράδειγμα</u> [Ohanian, p.23]: Συνολική ποσότητα φορτίου Q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε λεπτό δακτύλιο ακτίνας R. Ποιό είναι το ηλ. πεδίο στον άξονα του δακτυλίου?



▷ Φορτίο / μονάδα μήκους $= \dfrac{Q}{2\pi R}$ = <u>γρ. πυκνότητα</u>

▷ Φορτίο στο στοιχειώδες τόξο dl: $dQ = \dfrac{Q}{2\pi R}\,dl$

▷ $dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{dQ}{r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{Q\,dl}{2\pi R}\,\dfrac{1}{z^2+R^2}$

Κατακόρυφη συνιστώσα του dE:

$$\left.\begin{aligned} dE_z &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q\,dl}{2\pi R}\,\frac{\cos\theta}{z^2+R^2} \\ dl &= R\,d\varphi\ ;\quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} &\frac{2\pi R}{dl} = \frac{Q}{dQ} \Rightarrow \\ &\Rightarrow dQ = \frac{Q}{2\pi r}\,dl \end{aligned}\right]$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{\cancel{2\pi R}}\,\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,\cancel{\underbrace{\int_0^{2\pi} R\,d\varphi}_{2\pi R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qz}{(z^2+R^2)^{3/2}}}$$

Διανυσματικά: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$

▷ Στο όριο $z=0 \Rightarrow \vec{E}=0$

▷ Στο όριο $z \gg R \Rightarrow \underbrace{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2}\hat{z}}_{\boxed{\text{ηλ. πεδίο σημειακού φορτίου}}}$

Go to p. 8α

Γραμμές ηλ. πεδίου (δυναμικές γραμμές)

▷ Το ηλ. πεδίο αναπαρίσταται ως διάνυσμα →

δυναμική γραμμή: σε οποιοδήποτε σημείο της, η εφαπτομένη στη γραμμή δείχνει τη δ/νση του ηλ. πεδίου

Επίσης: η πυκνότητα των γραμμών ∼ μέτρο του πεδίου

▷ Οι δυν. γραμμές ξεκινούν από θετικό φορτίο και καταλήγουν σε αρνητικό, ή συνεχίζουν ως το ∞.
[όπως η δύναμη που θα ασκούνταν σε θετικά φορτισμένο σωμάτιο]