



H-M (Math) – Διάλεξη (16/Μαρ./2023)

Κοσμάς Λ. Τσακμακίδης
Επικ. Καθηγητής
(<http://www.ktsakmakidis.com/>)

1837
2017
ΧΡΟΝΙΑ



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών



ΘΕΟΔΩΡΟΣ Δ. ΤΣΙΜΠΟΥΚΗΣ

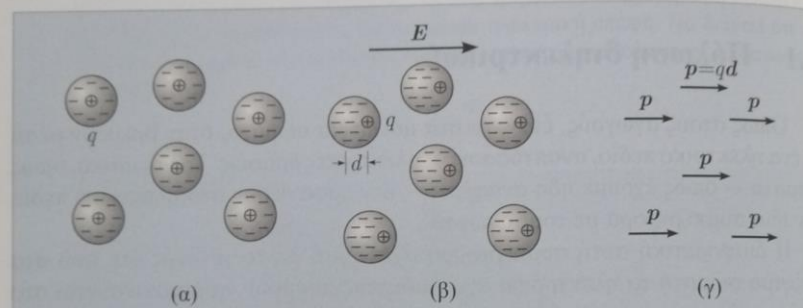
Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Βασική θεωρία και εφαρμογές

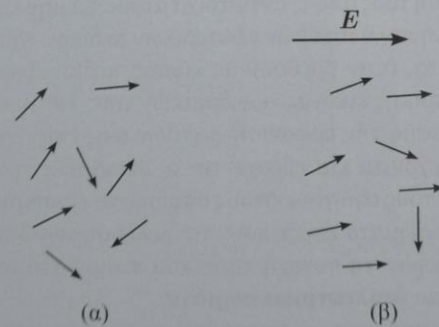
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

Φ Υ Σ Ι Κ Η

κάθε μόριο εμφανίζεται ως ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο με μια – επαγόμενη – ηλεκτρική διπολική ροπή p παράλληλη προς το επιβαλλόμενο πεδίο. Είναι αυτονόητο ότι και η συνολική διπολική ροπή του διηλεκτρικού, ως άθροισμα των ρομών p των στοιχειωδών διπόλων, είναι επίσης μη μηδενική και παράλληλη προς το πεδίο. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **πόλωση** (polarization) του διηλεκτρικού. Τα υλικά αυτά που τα μόριά τους κατά την απουσία εξωτερικού πεδίου έχουν μηδενικό φορτίο και μηδενική διπολική ροπή ονομάζονται *μη πολωμένα υλικά* ή υλικά με *μη πολικά μόρια*.



ΣΧΗΜΑ 3.1: α) Απουσία εξωτερικού πεδίου ($E = 0$). β) Επιβολή εξωτερικού πεδίου ($E \neq 0$). γ) Ισοδύναμα ηλεκτρικά δίπολα.



ΣΧΗΜΑ 3.2: α) Απουσία εξωτερικού πεδίου ($E = 0$). β) Επιβολή εξωτερικού πεδίου ($E \neq 0$).

Υπάρχει, όμως, και μια *δεύτερη κατηγορία* διηλεκτρικών υλικών (π.χ. το νερό) στην οποία τα μόρια – από την εσωτερική τους δομή – είναι τέτοια ώστε, ακόμη και πριν την επιβολή οποιουδήποτε εξωτερικού πεδίου, τα ίσα και αντίθετα φορτία που είναι διανεμημένα σ' αυτά να μην έχουν το ίδιο ηλεκτρικό κέντρο βάρους, με αποτέλεσμα τα μόριά τους να εμφανίζουν μη μηδενική διπολική ροπή. Τα υλικά της κατηγορίας αυτής ονομάζονται *πολωμένα*

υλικά ή υλικά με *πολικά μόρια*. Στα υλικά της κατηγορίας αυτής, κατά την απουσία εξωτερικού πεδίου, τα στοιχειώδη δίπολα έχουν τυχαίο προσανατολισμό με αποτέλεσμα η συνολική διπολική ροπή ενός οποιουδήποτε τμήματος του υλικού, ακόμη και πολύ μικρού, που περιλαμβάνει, όμως, μεγάλο αριθμό μορίων, να είναι μηδενική (Σχήμα 3.2(α)). Κατά την επιβολή, όμως, κάποιου εξωτερικού πεδίου, οι αναπτυσσόμενες ροπές πάνω στα στοιχειώδη δίπολα τείνουν να τα περιστρέψουν και να τα προσανατολίσουν κατά τη διεύθυνση του πεδίου (Σχήμα 3.2(β)). Ως τελικό αποτέλεσμα, τα υλικά αυτά εμφανίζουν μια μη μηδενική συνολική διπολική ροπή που είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση του πεδίου, έχουμε, δηλαδή και πάλι *πόλωση* του διηλεκτρικού. Η πόλωση των διηλεκτρικών της κατηγορίας αυτής, λόγω του ενιαίου τελικού προσανατολισμού που τείνουν να πάρουν όλα τα στοιχειώδη δίπολα, ονομάζεται *πόλωση προσανατολισμού*.

Ως προς την πόλωση των διηλεκτρικών της πρώτης κατηγορίας, αυτή, ανάλογα με τον μοριακό (π.χ. NaCl) ή ατομικό χαρακτήρα των στοιχειωδών διπόλων, ονομάζεται *ιοντική* (ή *πόλωση μετατόπισης*) ή *ηλεκτρονική πόλωση*, αντίστοιχα.

Μια *τρίτη κατηγορία* διηλεκτρικών είναι οι *ηλεκτρήτες* (electrets). Οι **ηλεκτρήτες** παραμένουν πολωμένοι και μετά την αφαίρεση του εξωτερικά επιβαλλόμενου ηλεκτρικού πεδίου. Θα πρέπει, όμως, να σημειώσουμε ότι οι ηλεκτρήτες, εκτός από το ότι είναι αρκετά σπάνιοι, παρουσιάζουν περιορισμένο σχετικά τεχνολογικό ενδιαφέρον, αντίθετα με τα ‘μαγνητικά τους ανάλογα’ – τους μόνιμους μαγνήτες – που χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε πολλές ηλεκτροτεχνικές εφαρμογές.

Κρίνουμε, τέλος, σκόπιμο να κάνουμε μια, έστω και συντομότητα αναφορά σε τρία ενδιαφέροντα και πολύ γνωστά φαινόμενα, που σχετίζονται με τα θέματα που εξετάζονται στο παρόν κεφάλαιο.

Το πρώτο, που είναι γνωστό ως **πιεζοηλεκτρισμός** (piezoelectricity), αναφέρεται στην ιδιότητα κάποιων διηλεκτρικών υλικών (κυρίως κρυσταλλικών και μερικών κεραμικών υλικών) να παράγουν ηλεκτρική τάση κατά την άσκηση σ’ αυτά μηχανικών πιέσεων ή ταλαντώσεων. Οι πιέσεις αυτές προκαλούν σχετικές μετατοπίσεις των στοιχειωδών διπόλων και φορτία στα άκρα του κρυσταλλικού πλέγματος. Να σημειωθεί ότι ο πιεζοηλεκτρισμός είναι αντιστρεπτό φαινόμενο, δηλαδή η επιβολή ηλεκτρικής τάσης στα υλικά αυτά προκαλεί τη μηχανική τους παραμόρφωση. Χαρακτηριστικές εφαρμογές του πιεζοηλεκτρισμού συναντάει κανείς σε διάφορους τομείς (ηλεκτρακουστική, βιοϊατρική, ηλεκτρονικά, ταλαντωτές, υπέρηχοι, κ.λ.π.).

Το δεύτερο φαινόμενο, που είναι γνωστό ως **ηλεκτροσυστολή** (electrostriction), αναφέρεται στη δυνατότητα μικρής μεταβολής των διαστάσεων και του σχήματος κάποιου διηλεκτρικού υλικού, ως αποτέλεσμα του επαναπροσανατο-

Στα ανισότροπα διηλεκτρικά, τα διανύσματα \mathbf{P} και \mathbf{E} δεν είναι συγγραμμικά, ούτε, συνεπώς, και τα διανύσματα \mathbf{D} και \mathbf{E} . Στα υλικά αυτά τόσο η (1.201) που συνδέει τα διανύσματα \mathbf{D} και \mathbf{E} , όσο και η (3.34) που συνδέει τα διανύσματα \mathbf{P} και \mathbf{E} είναι τανυστική. Έτσι, αντίστοιχα, προς την (1.202) που συσχετίζει τις συνιστώσες των διανυσμάτων \mathbf{D} και \mathbf{E} μέσω του τανυστή ϵ , οι συνιστώσες των διανυσμάτων \mathbf{P} και \mathbf{E} συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0(x_{e_{xx}} E_x + x_{e_{xy}} E_y + x_{e_{xz}} E_z), \\ P_y &= \epsilon_0(x_{e_{yx}} E_x + x_{e_{yy}} E_y + x_{e_{yz}} E_z), \\ P_z &= \epsilon_0(x_{e_{zx}} E_x + x_{e_{zy}} E_y + x_{e_{zz}} E_z). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή ότι στα **ανισότροπα** διηλεκτρικά υλικά η ηλεκτρική επιδεκτικότητα δεν είναι βαθμωτό μέγεθος, αλλά **τανυστής** που έχει ως συνιστώσες τους 9 συντελεστές των E_x, E_y, E_z στις εξισώσεις (3.38).

Τέλος, μια ειδική κατηγορία διηλεκτρικών υλικών είναι τα **σιδηροηλεκτρικά** (ferroelectric) υλικά. Στα υλικά αυτά, εκτός από τη μη γραμμική σχέση μεταξύ των \mathbf{P} και \mathbf{E} (ή \mathbf{D} και \mathbf{E}), παρατηρείται και το φαινόμενο της ηλεκτρικής **υστέρησης** κατά το οποίο οι τιμές της πόλωσης \mathbf{P} (ή της μετατόπισης \mathbf{D}) δεν εξαρτώνται μόνον από τη στιγμιαία τιμή της έντασης \mathbf{E} , αλλά και από τις χρονικά προηγούμενες τιμές της. Τα υλικά της κατηγορίας αυτής εμφανίζουν περιορισμένη πρακτική σημασία, αντίθετα με τα σιδηρομαγνητικά υλικά που είναι υλικά με αντίστοιχες ιδιότητες στο μαγνητικό πεδίο και χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε πολλές εφαρμογές. Κατά τη μελέτη των ιδιοτήτων των σιδηρομαγνητικών υλικών θα εξεταστεί λεπτομερώς το φαινόμενο της μαγνητικής υστέρησης.

Στη συνέχεια της ανάλυσης του παρόντος κεφαλαίου, θεωρούμε μόνο γραμμικά και ισότροπα διηλεκτρικά. Άλλωστε, η συντριπτική πλειοψηφία των διηλεκτρικών υλικών ανήκει σ' αυτήν την κατηγορία.

3.4 Συνθήκες στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διηλεκτρικών

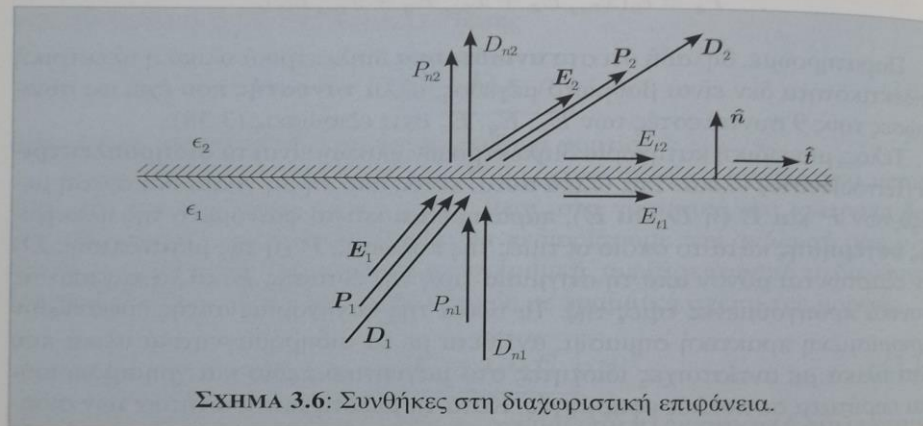
Από τη μέχρι τώρα ανάλυση του παρόντος κεφαλαίου και τα συμπεράσματα της παραγράφου 1.2.6, διατυπώνονται εύκολα οι συνθήκες των πεδιακών μεγεθών στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διηλεκτρικών (Σχήμα 3.6). Σύμφωνα λοιπόν με τις (1.248) και (1.252) ισχύουν οι

$$E_{t_1} = E_{t_2}, \quad (3.39)$$

$$D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s, \quad (3.40)$$

όπου ρ_s είναι η πυκνότητα των αληθινών φορτίων στη διαχωριστική επιφάνεια, ενώ οι θετικές φορές των συνιστωσών των διανυσματικών μεγεθών E, D, P αντιστοιχίζονται στις κατευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων \hat{n} και \hat{t} του Σχήματος 3.6. Επίσης, αν ρ_{sb} είναι η πυκνότητα των φορτίων πόλωσης στη διαχωριστική επιφάνεια, από την (3.25) και αφού λάβουμε υπόψη τις φορές αναφοράς του Σχήματος 3.6 ($\hat{n}' = -\hat{n}$), προκύπτει η οριακή συνθήκη

$$P_{n_1} - P_{n_2} = \rho_{sb} \quad (3.41)$$



ΣΧΗΜΑ 3.6: Συνθήκες στη διαχωριστική επιφάνεια.

Η συνολική πυκνότητα ρ_{st} των φορτίων στη διαχωριστική επιφάνεια, όπως προκύπτει από τις (3.40), (3.41) και την (3.37), δίνεται από την

$$\begin{aligned} \rho_{st} &= \rho_s + \rho_{sb} = (D_{n_2} - P_{n_2}) - (D_{n_1} - P_{n_1}) \\ &= \left(D_{n_2} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2} D_{n_2} \right) - \left(D_{n_1} - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} D_{n_1} \right) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} D_{n_2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} D_{n_1} \end{aligned}$$

ή

$$\epsilon_0(E_{n_2} - E_{n_1}) = \rho_{st} \quad (3.42)$$

3.5 Συνθήκες στις επιφάνειες αγωγών

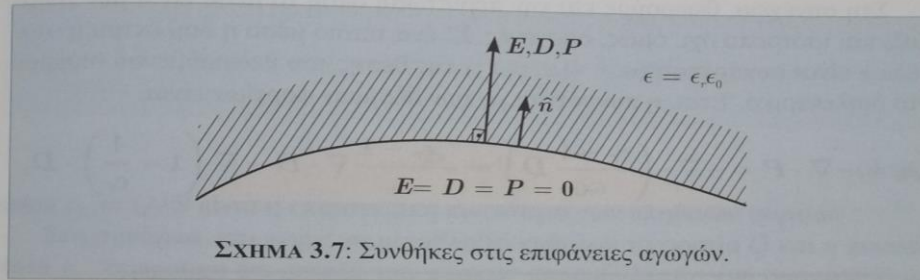
Στην περίπτωση όπου το μέσο 1 είναι αγωγίμο, ενώ το μέσο 2 διηλεκτρικό (Σχήμα 3.7) με διηλεκτρική σταθερά $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, τότε επειδή στους αγωγούς τα

διανύσματα E , D και P είναι μηδενικά, από τις (3.40), (3.41) και (3.42), με παράλειψη του δείκτη 2, προκύπτουν οι

$$D_n = \rho_s \quad (3.43)$$

$$P_n = -\rho_{sb} \quad (3.44)$$

$$\epsilon_0 E_n = \rho_{st} \quad (3.45)$$



Από τις τρεις τελευταίες σχέσεις και τις (1.201), (3.37), προκύπτουν πολύ εύκολα οι σχέσεις μεταξύ των ρ_s , ρ_{sb} και ρ_{st}

$$\rho_{sb} = -P_n = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} D_n = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_s \quad (3.46)$$

$$\rho_{st} = \epsilon_0 \frac{D_n}{\epsilon} = \frac{D_n}{\epsilon_r} = \frac{\rho_s}{\epsilon_r} \quad (3.47)$$

3.6 Σχέσεις μεταξύ των ρ , ρ_b και ρ_t

Ας ζητήσουμε, τώρα, να βρούμε πώς συνδέονται μεταξύ τους οι χωρικές πυκνότητες ρ , ρ_b και ρ_t . Αρχικά, θεωρούμε ότι το πεδίο εκτείνεται σ' ένα γραμμικό, ισότροπο και ομογενές μέσο που η διηλεκτρική του σταθερά $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ έχει την ίδια τιμή σ' όλα τα σημεία του. Η πυκνότητα ρ των αληθινών φορτίων δίνεται πάντοτε, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, από την (3.33). Επίσης, για την πυκνότητα ρ_b των χωρικών φορτίων πόλωσης, από τις (3.18), (3.37) και (3.33) έχουμε

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} \right) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \nabla \cdot \mathbf{D}$$

ή

$$\rho_b = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho \quad (3.48)$$

Η συνολική πυκνότητα ρ_t των χωρικών φορτίων δίνεται, λόγω της (3.48), από την

$$\rho_t = \rho + \rho_b = \frac{\rho}{\epsilon_r} = -\frac{\rho_b}{\epsilon_r - 1} \quad (3.49)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε και την περίπτωση όπου το μέσο είναι μεν γραμμικό και ισότροπο όχι, όμως, ομογενές. Σ' ένα τέτοιο μέσο η διηλεκτρική σταθερά ϵ είναι συνάρτηση ($\epsilon = \epsilon(x, y, z)$) της θέσης του θεωρούμενου σημείου στο διηλεκτρικό. Έτσι, η πυκνότητα ρ_b των δέσμιων φορτίων είναι

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} \right) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \cdot \mathbf{D},$$

ή

$$\rho_b = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho - \frac{\mathbf{D} \cdot \nabla(\epsilon_r)}{\epsilon_r^2} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho - \epsilon_0 \frac{\mathbf{E} \cdot \nabla(\epsilon_r)}{\epsilon_r} \quad (3.50)$$

Η συνολική πυκνότητα, συνεπώς, ρ_t δίνεται, λόγω της (3.50), από την

$$\rho_t = \rho_b + \rho = \frac{\rho - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \nabla(\epsilon_r)}{\epsilon_r} \quad (3.51)$$

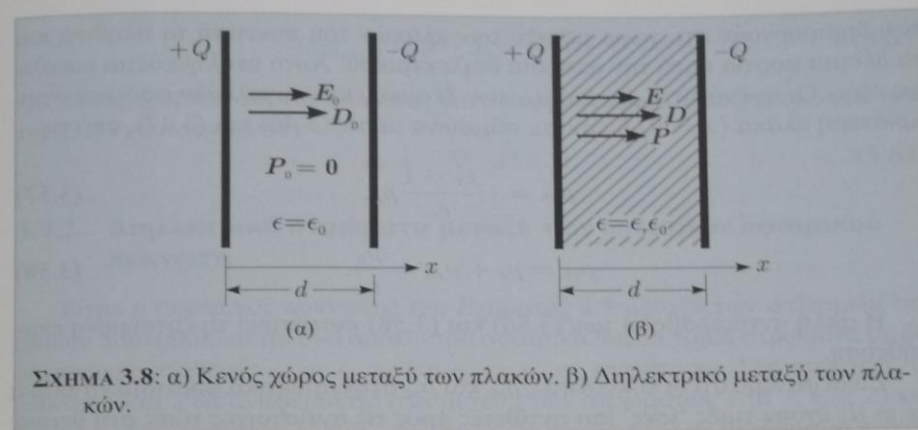
3.7 Πόλωση σε μερικές απλές διατάξεις

3.7.1 Πόλωση διηλεκτρικού στο πεδίο επίπεδου πυκνωτή

Ας θεωρήσουμε, αρχικά, ότι στον μεταξύ των πλακών του επίπεδου πυκνωτή του Σχήματος 3.8(α) χώρο δεν παρεμβάλλεται κανένα διηλεκτρικό ($\epsilon = \epsilon_0$). Αν $\pm Q$ είναι τα φορτία των οπλισμών του πυκνωτή και S τα εμβαδά τους, τα διανύσματα \mathbf{D} , \mathbf{E} και \mathbf{P} , συμβολιζόμενα ως \mathbf{D}_0 , \mathbf{E}_0 , \mathbf{P}_0 , με αγνόηση των φαινομένων των άκρων στην περίπτωση απουσίας διηλεκτρικού, δίνονται, κατά τα γνωστά, από τις

$$\mathbf{D}_0 = \rho_s \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{E}_0 = \frac{D_0}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.53)$$



ΣΧΗΜΑ 3.8: α) Κενός χώρος μεταξύ των πλακών. β) Διηλεκτρικό μεταξύ των πλακών.

$$P_0 = 0, \quad (3.54)$$

όπου $\rho_s = Q/S$ είναι η επιφανειακή πυκνότητα των αληθινών φορτίων.

Στη συνέχεια, και χωρίς να μεταβληθεί καθόλου το φορτίο Q και η πυκνότητα ρ_s , θεωρούμε ότι μεταξύ των πλακών παρεμβάλλεται ένα ομογενές διηλεκτρικό με διηλεκτρική σταθερά $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8(β). Στην περίπτωση αυτή το διηλεκτρικό, υπό την επίδραση του πεδίου, πολώνεται και τα αναπτυσσόμενα φορτία πόλωσης εντοπίζονται μόνο στις δύο επιφάνειές του $x = 0$ και $x = d$ που εφάπτονται στις πλάκες του πυκνωτή, αφού τα φορτία πόλωσης στο εσωτερικό του διηλεκτρικού αλληλοεξουδετερώνονται, όπως εξηγήθηκε σε προηγούμενη παράγραφο. Το πεδίο και μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού θεωρείται ομοιόμορφο (αγνοούνται και πάλι τα φαινόμενα των άκρων), δεν είναι, όμως, το ίδιο με το πεδίο που υπήρχε πριν την εισαγωγή του διηλεκτρικού.

Η διηλεκτρική μετατόπιση, σύμφωνα με την (3.43), αφού δεν μεταβάλλεται η πυκνότητα ρ_s των αληθινών φορτίων, παραμένει η ίδια, είναι, δηλαδή

$$D = D_0 = \rho_s \hat{x}. \quad (3.55)$$

Η ηλεκτρική πεδιακή, όμως, ένταση E μεταβάλλεται, και δίνεται, λόγω των (3.55) και (3.53), από την

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\rho_s}{\epsilon_r \epsilon_0} \hat{x} = \frac{E_0}{\epsilon_r}. \quad (3.56)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή ότι η ένταση του πεδίου είναι ϵ_r φορές μικρότερη από την ένταση E_0 του πεδίου πριν την εισαγωγή του διηλεκτρικού. Η ένταση αυτή, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, είναι ίση με την ένταση

που δημιουργούν στο χώρο μεταξύ των πλακών του πυκνωτή τα αληθινά και τα δεσμια φορτία κατά την απουσία διηλεκτρικού. Αυτό επαληθεύεται εύκολα ως εξής: Οι πυκνότητες ρ_{sb} και ρ_{st} των δεσμιών και συνολικών φορτίων στην αριστερή πλάκα ($x = 0$) δίνονται, σύμφωνα με τις (3.46) και (3.47), από τις

$$\rho_{sb} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_s, \quad (3.57)$$

$$\rho_{st} = \rho_s + \rho_{sb} = \frac{\rho_s}{\epsilon_r}. \quad (3.58)$$

Η απλή αντιπαραβολή των (3.56) και (3.58) πιστοποιεί τη ζητούμενη επαλήθευση.

Είναι φανερό ότι οι πυκνότητες ρ_{sb} και ρ_{st} στην αρνητικά φορτισμένη πλάκα ($x = d$) έχουν τιμές 'ίσες' και αντίθετες προς τις αντίστοιχες τιμές στη θετικά φορτισμένη πλάκα ($x = 0$) που δίνονται από τις (3.57) και (3.58).

Επίσης, αν U_0 και U είναι η μεταξύ των πλακών τάση, πριν και μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού, από τις (3.53) και (3.56) έχουμε

$$U = Ed = \frac{1}{\epsilon_r} E_0 d = \frac{U_0}{\epsilon_r}. \quad (3.59)$$

Από την (3.59) προκύπτει ότι οι αντίστοιχες χωρητικότητες C και C_0 συνδέονται με την

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_0/\epsilon_r} = \epsilon_r \frac{Q}{U_0} = \epsilon_r C_0. \quad (3.60)$$

Βλέπουμε, δηλαδή ότι η εισαγωγή του διηλεκτρικού προκαλεί ελάττωση κατά ϵ_r φορές της τάσης και αύξηση κατά ϵ_r φορές της χωρητικότητας.

Το διάνυσμα \mathbf{P} της πόλωσης, που υπολογίζεται από την (3.37) και την (3.56), δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_s \hat{\mathbf{x}} = \epsilon_0 (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}). \quad (3.61)$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι οι (3.55), (3.56) και (3.61) επαληθεύουν τη γενική σχέση (3.32) που συνδέει πάντοτε τα τρία διανύσματα \mathbf{E} , \mathbf{D} και \mathbf{P} .

Επίσης, τα φορτία πόλωσης μπορούν να υπολογιστούν και από την (3.61) με εφαρμογή της (3.19), αφού υπενθυμίσουμε ότι η θετική φορά της κάθετης συνιστώσας P_n λαμβάνεται από το διηλεκτρικό προς την αντίστοιχη πλάκα. Πράγματι, από την αντικατάσταση της (3.61) στην (3.19) ξαναβρίσκουμε τις πυκνότητες των φορτίων πόλωσης στις δύο πλάκες

$$\rho_{sb}|_{x=0} = \mathbf{P} \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_s, \quad (3.62)$$

$$\rho_{sb}|_{x=d} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_s. \quad (3.63)$$

Τέλος, χωρικά φορτία πόλωσης δεν υπάρχουν, γιατί όπως προκύπτει από την (3.18) και την (3.61)

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (3.64)$$

3.7.2 Διηλεκτρικά στρώματα μεταξύ των οπλισμών σφαιρικού πυκνωτή

Έστω ο σφαιρικός πυκνωτής του Σχήματος 3.9 μεταξύ των οπλισμών του οποίου παρεμβάλλονται δύο ομόκεντρα σφαιρικά διηλεκτρικά στρώματα με διηλεκτρικές σταθερές $\epsilon_1 = \epsilon_{r1}\epsilon_0$ και $\epsilon_2 = \epsilon_{r2}\epsilon_0$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, οι δείκτες 1 και 2 θα αναφέρονται στα μεγέθη των στρωμάτων 1 ($a < r < c$) και 2 ($c < r < b$), αντίστοιχα, ενώ ο δείκτης 0 θα αναφέρεται σε μεγέθη του πεδίου του πυκνωτή όταν ο μεταξύ των οπλισμών χώρος είναι κενός ύλης.

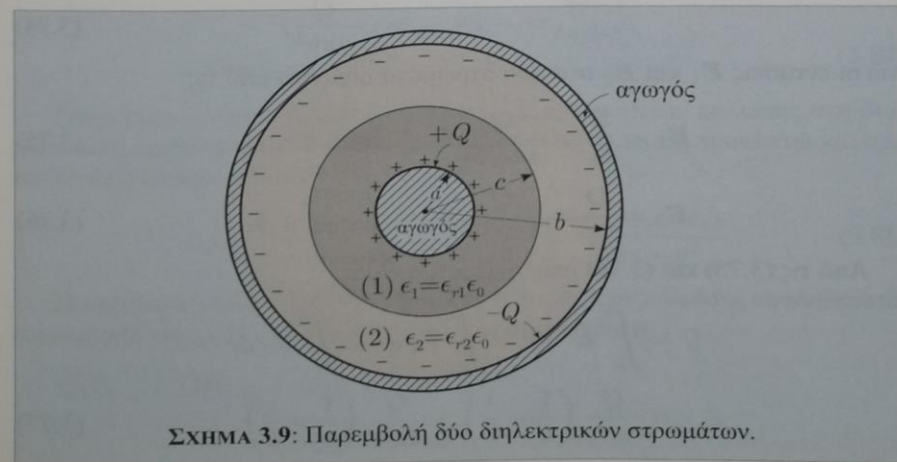
Αν Q και $-Q$ είναι τα αληθινά φορτία των μονωμένων οπλισμών, η διηλεκτρική μετατόπιση \mathbf{D}_0 κατά την απουσία οποιουδήποτε διηλεκτρικού σε μια ακτινική απόσταση r είναι, όπως εύκολα προκύπτει από την εφαρμογή του νόμου του Gauss,

$$\mathbf{D}_0 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.65)$$

όπου $\hat{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την ακτινική διεύθυνση.

Η ένταση \mathbf{E}_0 και το διάνυσμα \mathbf{P}_0 της πόλωσης δίνονται, αντίστοιχα, από τις

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{D}_0}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.66)$$



ΣΧΗΜΑ 3.9: Παρεμβολή δύο διηλεκτρικών στρωμάτων.

$$P_0 = 0. \quad (3.67)$$

Η επιφανειακή πυκνότητα ρ_{so} των αληθινών φορτίων στους δύο οπλισμούς είναι, προφανώς,

$$\rho_{so}|_{r=a} = D_0|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}, \quad (3.68)$$

$$\rho_{so}|_{r=b} = -D_0|_{r=b} = -\frac{Q}{4\pi b^2}. \quad (3.69)$$

Από την ολοκλήρωση της (3.66) κατά μήκος οποιασδήποτε ακτίνας υπολογίζεται η τάση U_0 και, στη συνέχεια, η χωρητικότητα C_0

$$U_0 = \int_a^b E_0 dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \quad (3.70)$$

$$C_0 = \frac{Q}{U_0} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ba}{b-a}. \quad (3.71)$$

Η διηλεκτρική μετατόπιση D και μετά την εισαγωγή των δύο διηλεκτρικών στρωμάτων (Σχήμα 3.9) παραμένει η ίδια, αφού, σύμφωνα με τον νόμο του Gauss, δίνεται και πάλι από την

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (a < r < b). \quad (3.72)$$

Έτσι, οι επιφανειακές πυκνότητες των αληθινών φορτίων στους δύο οπλισμούς παραμένουν, επίσης, αμετάβλητες

$$\rho_{s1}|_{r=a} = D|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}, \quad (3.73)$$

$$\rho_{s2}|_{r=b} = -D|_{r=b} = -\frac{Q}{4\pi b^2}, \quad (3.74)$$

ενώ οι εντάσεις E_1 και E_2 στα δύο στρώματα δίνονται από τις

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \hat{r} \quad (a < r < c), \quad (3.75)$$

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2} \hat{r} \quad (c < r < b). \quad (3.76)$$

Από τις (3.75) και (3.76) υπολογίζεται η τάση

$$\begin{aligned} U &= \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^c E_1 dr + \int_c^b E_2 dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned} \quad (3.77)$$

και η χωρητικότητα

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right)}. \quad (3.78)$$

Το διάνυσμα της πόλωσης \mathbf{P} στα δύο στρώματα, όπως φαίνεται από τις (3.37) και (3.72), είναι

$$\mathbf{P}_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \mathbf{D} = \frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_1 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (a < r < c), \quad (3.79)$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2} \mathbf{D} = \frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_2 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (c < r < b). \quad (3.80)$$

Οι επιφανειακές πυκνότητες των φορτίων πόλωσης στους δύο οπλισμούς δίνονται, σύμφωνα με την (3.44) και τις (3.79), (3.80), από τις

$$\rho_{sb1}|_{r=a} = \mathbf{P}_1|_{r=a} \cdot (-\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_1 a^2}, \quad (3.81)$$

$$\rho_{sb2}|_{r=b} = \mathbf{P}_2|_{r=b} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_2 b^2}. \quad (3.82)$$

Όπως εύκολα μπορεί ναδειχτεί, οι (3.81) και (3.82) προκύπτουν και από τις (3.73), (3.74) με εφαρμογή της (3.46).

Οι επιφανειακές πυκνότητες των φορτίων πόλωσης στις δύο όψεις της διαχωριστικής επιφάνειας $r = c$ των δύο διηλεκτρικών είναι, σύμφωνα με την (3.19),

$$\rho_{sb1}|_{r=c} = \mathbf{P}_1|_{r=c} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_1 c^2}, \quad (3.83)$$

$$\rho_{sb2}|_{r=c} = \mathbf{P}_2|_{r=c} \cdot (-\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_2 c^2}. \quad (3.84)$$

Επομένως, η επιφανειακή πυκνότητα ρ_{sb} των φορτίων πόλωσης στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο διηλεκτρικών (όπως άλλωστε προκύπτει και από την (3.41)) δίνεται από την

$$\rho_{sb}|_{r=c} = \rho_{sb1}|_{r=c} + \rho_{sb2}|_{r=c} = \frac{Q\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{4\pi\epsilon_1\epsilon_2 c^2}. \quad (3.85)$$

Η απαίτηση μηδενισμού του συνόλου των φορτίων πόλωσης επαληθεύεται εύκολα από τις (3.81), (3.82) και (3.85), καθώς ισχύει η

$$\begin{aligned} Q_b|_{r=a} + Q_b|_{r=b} + Q_b|_{r=c} \\ = 4\pi a^2 \rho_{sb1}|_{r=a} + 4\pi b^2 \rho_{sb2}|_{r=b} + 4\pi c^2 \rho_{sb}|_{r=c} = 0. \end{aligned}$$

Από τις (3.73), (3.74), (3.81), (3.82) και (3.85) προκύπτουν, επίσης, οι επιφανειακές πυκνότητες των συνολικών φορτίων στις τρεις διαχωριστικές επιφάνειες

$$\begin{aligned}\rho_{st}|_{r=a} &= \rho_{s1}|_{r=a} + \rho_{sb1}|_{r=a} \\ &= \frac{Q}{4\pi a^2} - \frac{Q}{4\pi a^2} \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_{r1} a^2} = \frac{\rho_{s1}|_{r=a}}{\epsilon_{r1}},\end{aligned}\quad (3.86)$$

$$\begin{aligned}\rho_{st}|_{r=c} &= \rho_{sb1}|_{r=c} + \rho_{sb2}|_{r=c} \\ &= \frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{4\pi \epsilon_1 c^2} - \frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{4\pi \epsilon_2 c^2} = \frac{Q}{4\pi c^2} \left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right),\end{aligned}\quad (3.87)$$

$$\begin{aligned}\rho_{st}|_{r=b} &= \rho_{s2}|_{r=b} + \rho_{sb2}|_{r=b} \\ &= -\frac{Q}{4\pi b^2} + \frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{4\pi \epsilon_2 b^2} = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_{r2} b^2} = \frac{\rho_{s2}|_{r=b}}{\epsilon_{r2}}.\end{aligned}\quad (3.88)$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση \mathbf{E} στα δύο διηλεκτρικά στρώματα είναι ίση με την ένταση του πεδίου που δημιουργούν στο κενό τρία φορτία διανεμημένα στις επιφάνειες $r = a$, $r = c$, $r = b$ με πυκνότητες που δίνονται από τις (3.86), (3.87) και (3.88), αντίστοιχα. Τέλος, χωρικά φορτία πόλωσης δεν υπάρχουν, αφού, όπως προκύπτει από την (3.48), σ' ένα ομογενές μέσο χωρικά φορτία πόλωσης εμφανίζονται μόνο σε θέσεις αληθινών χωρικών φορτίων. Στον μεταξύ των οπλισμών χώρο (όπου $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$) ισχύει, λοιπόν, η

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (3.89)$$

Είναι άλλωστε εύκολο να διαπιστωθεί, από την έκφραση της απόκλισης σε σφαιρικές συντεταγμένες, ότι το διάνυσμα της πόλωσης \mathbf{P} που οι εκφράσεις του στα δύο στρώματα δίνονται από τις (3.79) και (3.80) επαληθεύει την (3.89).

3.7.3 Μη ομογενές διηλεκτρικό σε κυλινδρικό πυκνωτή

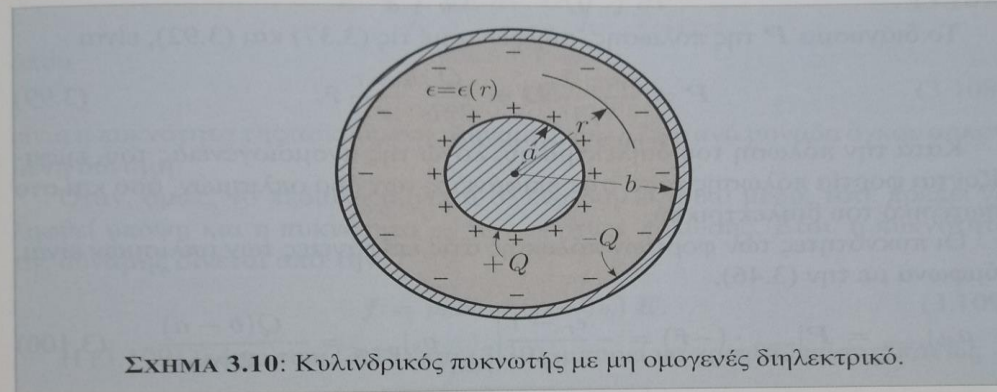
Ως ένα παράδειγμα μελέτης της πόλωσης σ' ένα μη ομογενές διηλεκτρικό μέσο, θεωρούμε ότι το διηλεκτρικό του κυλινδρικού πυκνωτή του Σχήματος 3.10 έχει διηλεκτρική σταθερά που μεταβάλλεται με την ακτινική απόσταση r κατά τη σχέση $\epsilon(r) = \epsilon_0 \epsilon_r(r) = \epsilon_0 b/r$.² Αν $+Q$ και $-Q$ είναι τα ανά μονάδα

²Προς αποφυγή σύγχυσης με τα σύμβολα της πυκνότητας φορτίου, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό r αντί ρ στις κυλινδρικές συντεταγμένες του παραδείγματος.

μήκους φορτία των δύο οπλισμών, τότε η επιφανειακή πυκνότητα των αληθινών φορτίων στους δύο οπλισμούς είναι, προφανώς,

$$\rho_s|_{r=a} = \frac{Q}{2\pi a}, \quad (3.90)$$

$$\rho_s|_{r=b} = -\frac{Q}{2\pi b}. \quad (3.91)$$



ΣΧΗΜΑ 3.10: Κυλινδρικός πυκνωτής με μη ομογενές διηλεκτρικό.

Η διηλεκτρική μετατόπιση D , όπως προκύπτει από τον νόμο του Gauss, δίνεται από την

$$D = \frac{Q}{2\pi r} \hat{r}, \quad (3.92)$$

όπου \hat{r} το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την ακτινική διεύθυνση.

Εφόσον τα φορτία $+Q$ και $-Q$ των δύο οπλισμών παραμένουν σταθερά, οι πιο πάνω πυκνότητες και η διηλεκτρική μετατόπιση (που έχει ως πηγές μόνον τα αληθινά φορτία) παραμένουν, επίσης, σταθερές, ανεξάρτητα από τις διηλεκτρικές ιδιότητες του μέσου που παρεμβάλλεται μεταξύ των οπλισμών.

Η ηλεκτρική πεδιακή ένταση E , η τάση U και η χωρητικότητα C του πυκνωτή, που κατά την απουσία διηλεκτρικού δίνονται από τις σχέσεις

$$E_0 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}, \quad (3.93)$$

$$U_0 = \int_a^b E_0 dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (3.94)$$

$$C_0 = \frac{Q}{U_0} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \quad (3.95)$$

μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού δίνονται, αντίστοιχα, από τις

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon(r)} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r(r)r} \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 b} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.96)$$

$$U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 b} \int_a^b dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{b}, \quad (3.97)$$

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi\epsilon_0 \frac{b}{b-a}. \quad (3.98)$$

Το διάνυσμα \mathbf{P} της πόλωσης, σύμφωνα με τις (3.37) και (3.92), είναι

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} = \frac{Q}{2\pi b} \frac{b-r}{r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.99)$$

Κατά την πόλωση του διηλεκτρικού, λόγω της ανομοιογένειάς του, εμφανίζονται φορτία πόλωσης τόσο στις επιφάνειες των δύο οπλισμών, όσο και στο εσωτερικό του διηλεκτρικού.

Οι πυκνότητες των φορτίων πόλωσης στις επιφάνειες των οπλισμών είναι, σύμφωνα με την (3.46),

$$\rho_{sb}|_{r=a} = \mathbf{P}|_{r=a} \cdot (-\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \Big|_{r=a} \rho_s|_{r=a} = -\frac{Q(b-a)}{2\pi ab}, \quad (3.100)$$

$$\rho_{sb}|_{r=b} = \mathbf{P}|_{r=b} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \Big|_{r=b} \rho_s|_{r=b} = 0. \quad (3.101)$$

Η πυκνότητα ρ_b των χωρικών φορτίων πόλωσης υπολογίζεται από την (3.18), την (3.99) και την έκφραση της απόκλισης σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rP_r)}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rP)}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi br}. \quad (3.102)$$

Η πυκνότητα ρ των αληθινών χωρικών φορτίων είναι, λόγω των (3.33) και (3.92),

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rD_r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rD)}{\partial r} = 0. \quad (3.103)$$

Οι αντίστοιχες πυκνότητες για τα συνολικά φορτία δίνονται από τις

$$\rho_{st}|_{r=a} = \rho_s|_{r=a} + \rho_{sb}|_{r=a} = \frac{Q}{2\pi b}, \quad (3.104)$$

$$\rho_t = \rho + \rho_b = \rho_b = \frac{Q}{2\pi br}, \quad (3.105)$$

$$\rho_{st}|_{r=b} = \rho_s|_{r=b} + \rho_{sb}|_{r=b} = \rho_s|_{r=b} = -\frac{Q}{2\pi b}. \quad (3.106)$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει την (3.102) με τη βοήθεια της (3.50), και ότι το σύνολο των φορτίων πόλωσης είναι ίσο με μηδέν.

Τέλος διάλεξης