Λύσεις των ασκήσεων.

A 1 $\overset{\text{Υποθ.}}{Q = 4\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2 \rho(r) < +\infty}$.

(i) $\xrightarrow{\text{Ροή}}$ $\oiint_{\Sigma_r} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\, dr'$

λόγω σφαιρικής συμμετρίας $\vec{E} = E_r(r)\, \hat{r}$.

$$\cancel{4\pi} r^2 E_r(r) = \frac{\cancel{4\pi}}{\epsilon_0} \int_0^r r'^2 \rho(r')\, dr'$$

$$\boxed{E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r')\, dr'}$$

Για τό δυναμικό έχουμε.

$$\phi(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r r'^2 \rho(r')\, dr' + h(r) .$$

Η συνάρτηση $h(r)$ βρίσκεται από τη συνθήκη

$$-\vec{\nabla}\phi(r) = \vec{E}(r) \text{ δηλαδή } -\frac{\partial \phi}{\partial r} = E_r(r) ,$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r')\, dr' - \frac{1}{\epsilon_0 r} \left(r^2 \rho(r)\right) - \frac{d}{dr} h(r)$$

$$= E_r(r) .$$

Αρα $\frac{d}{dr}h(r) = -\frac{1}{\epsilon_0}(r\rho(r))$.

$$h(r) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_r^\infty r'\rho(r')dr' + C_1$$

και αν θέλουμε τό δυναμικό να μηδενίζεται στο $\infty \Rightarrow C=0$.

(β) Ενας άλλος τροπος ειναι.

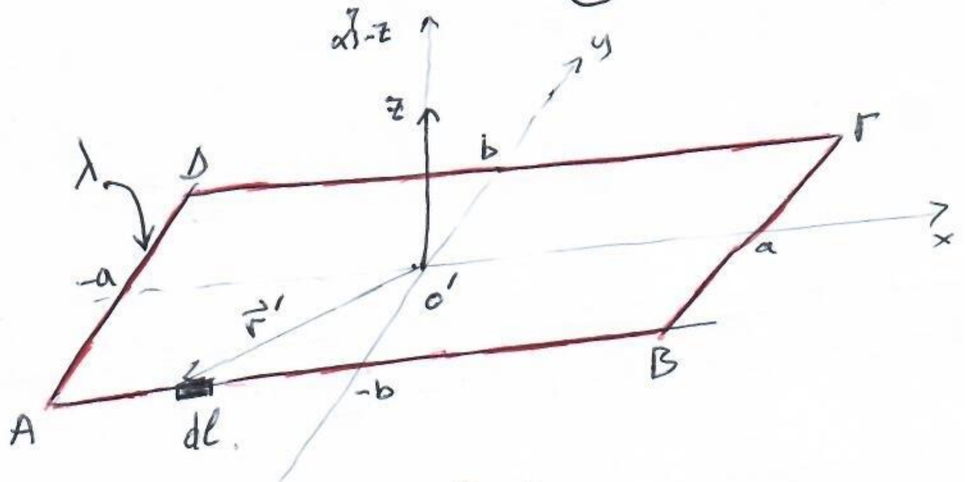
$$\phi(r) = \int_r^\infty E_r(r')dr' = \int_r^\infty \frac{dr'}{\epsilon_0 r'^2}\int_0^{r'} r''^2\rho(r'')dr'' =$$

$$= \int_r^\infty dr'\left(-\frac{1}{\epsilon_0 r'}\right)'_{r'}\int_0^{r'} r''^2\rho(r'')dr'' =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{\epsilon_0 r'}\right)\int_0^{r'} r''^2\rho(r'')dr''\right]_r^\infty + \int_r^\infty \frac{1}{\epsilon_0}\frac{r'^2}{r'}\rho(r')dr'$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0 r}\int_0^r r'\rho(r')dr' + \frac{1}{\epsilon_0}\int_r^\infty r'\rho(r')dr'$$

A 2



Από το νόμο Coulomb

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} dl, \text{ όπου}$$

$\vec{r} = z\hat{k}$, $\vec{r}\,' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$ πάνω στό βρόχο καί $dl = dx'$ ή dy' ανάλογα με τη πλευρά τού βρόχου.

$$\int_{(AB)} (\ldots) = \int_{-a}^{a} \frac{-x'\hat{i} + b\hat{j} + z\hat{k}}{(x'^2+b^2+z^2)^{3/2}} dx' =$$

$$= \left[\frac{2ab}{(b^2+z^2)\sqrt{a^2+b^2+z^2}}\right]\hat{j} + \left[\frac{2az}{(b^2+z^2)\sqrt{a^2+b^2+z^2}}\right]\hat{k} \; ,$$

όπου έγινε χρήση του ολοκληρώματος

$$\int \frac{du}{(u^2+c^2+z^2)^{3/2}} = \frac{u}{(c^2+z^2)\sqrt{u^2+c^2+z^2}} .$$

Η x-συνιστώσα είναι μηδέν γιατί έχουμε ολοκλήρωση περιττής συνάρτησης στό $(-a,a)$.

Ομοίως η ολοκλήρωση στή πλευρά ΒΓ, οδηγεί σε όμοια ολοκλήρωση

$$\int_{(B\Gamma)} (\ldots) = \int_{-b}^{b} \frac{-\alpha\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k}}{(\alpha^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}\, dy' =$$

$$= \left[\frac{-2\alpha b}{(\alpha^2 + z^2)\sqrt{\alpha^2 + b^2 + z^2}} \right] \hat{i} + \left[\frac{2bz}{(\alpha^2 + z^2)\sqrt{\alpha^2 + b^2 + z^2}} \right] \hat{k}$$

Η ολοκλήρωση στίς (ΓΔ) και (ΔΑ) πλευρές εξαλείφει τίς y καί x συνιστώσες αντίστοιχα. Ετσι τό τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\vec{E} = E_z(z)\,\hat{k},$$

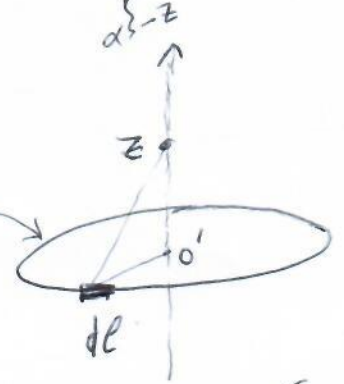
$$E_z(z) = \frac{\lambda z}{\pi \varepsilon_0} \left[\frac{\alpha}{(b^2 + z^2)\sqrt{\alpha^2 + b^2 + z^2}} + \frac{b}{(\alpha^2 + z^2)\sqrt{\alpha^2 + b^2 + z^2}} \right].$$

Οταν $|z| \gg \alpha, b$ εχουμε

$$E_z(z) \simeq \frac{\lambda z}{\pi \varepsilon_0} \frac{(\alpha + b)}{|z|^3},$$ καί πολλαπλασιάζοντας καί διαιρώντας με 4 εχουμε τήν προσέγγιση Coulomb.

A 3

(i)



Από τόν νόμο Coulomb

δυναμικό $\phi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{d\ell}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, πεδίο $\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\ell \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

οπου $\vec{r} = z\hat{k}$, $\vec{r}' = (R\cos\varphi)\hat{i} + (R\sin\varphi)\hat{j}$, $d\ell = R\,d\varphi$

$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{R\,d\varphi}{(R^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (R^2+z^2)^{1/2}}$$

Ομοίως

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi\, R\, \frac{(-R\cos\varphi)\hat{i} + (-R\sin\varphi)\hat{j} + z\hat{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

(ii) Θεωρώντας ως αρχή το μέσον του τμήματος που ενώνει τά δύο κέντρα των δακτυλίων έχουμε

$$\phi(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{[R^2+(z-d)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[R^2+(z+d)^2]^{1/2}}\right)$$

και $$E_z(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\left(\frac{z-d}{[R^2+(z-d)^2]^{3/2}} - \frac{z+d}{[R^2+(z+d)^2]^{3/2}}\right)$$

(Όταν $|z| \gg d, R$ έχουμε δυναμικό διπόλου).

A 4 i) Αντικαθιστώντας $z = r\cos\theta$, έχουμε τό δυναμικό

$$\phi(r,\theta) = -\mathcal{E}_0 r\cos\theta + B\cos\theta/r^2.$$

Πάνω στήν επιφάνεια τής αγώγιμης σφαίρας τό δυναμικο είναι σταθερό

$$\phi(r=R,\theta) = -\mathcal{E}_0 R\cos\theta + B\cos\theta/R^2 =$$
$$= \left(-\mathcal{E}_0 R + \frac{B}{R^2}\right)\cos\theta.$$

Απο αυτήν προκύπτει $B = \mathcal{E}_0 R^3$ και τό δυναμικό της σφαίρας είναι μηδέν. Αρα

$$\phi(r,\theta) = -\mathcal{E}_0 r\cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

(ii) Η επαγώμενη πυκνότητα φορτίου δίνεται από

$$-\epsilon_0 \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R},$$ απο τήν οποία προκύπτει

$$\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 \mathcal{E}_0 \cos\theta.$$

(Δείξτε οτι το ολικό επαγώμενο φορτίο είναι μηδέν).

(iii) Αν δεχθούμε οτι $\phi_{r=\infty} = -\mathcal{E}_0 z$, απο θεώρημα που έχουμε δείξει η λύση είναι μονοσήμαντη.
(Οποιαδήποτε άλλη λύση διαφέρει κατά μία σταθερά)

A 5

$$\int_0^R d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{2A}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = Q \Rightarrow$$

$$Q = 4\pi A \int_0^R d\rho \, \frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = (4\pi A)\int_0^R \left(-\sqrt{R^2-\rho^2}\right)'_\rho d\rho =$$

$$= 4\pi A R \Rightarrow \boxed{A = \frac{Q}{4\pi R}}$$

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_\Delta \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dS_\Delta \qquad \left(\begin{array}{l} \vec{r}\,' = (\rho\cos\varphi)\hat{i} + (\rho\sin\varphi)\hat{j} \\ \vec{r} = 0 \end{array} \right.$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \rho$$

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R d\rho\,\cancel{\rho}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{\sigma(\rho)}{\cancel{\rho}} =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_0^R d\rho \, \frac{Q}{2\pi R}\frac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^R \frac{d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

$$\int_0^R \frac{d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = \int_0^R \frac{d\rho}{R\sqrt{1-\rho^2/R^2}} \quad \left(u = \frac{\rho}{R},\ du = \frac{d\rho}{R} \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left[\sin^{-1}(u)\right]_0^1 = \pi/2 .$$

Άρα $V_0 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{Q}{8\varepsilon_0 R}$ ~~και~~ το δυναμικό του δίσκου

και $C_{\chi\omega\rho} = \dfrac{Q}{V_0} = 8\varepsilon_0 R \quad \left(< C_{\sigma\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R \right)$

A (6) Θεωρούμε φορτίο είδωλο $Q' = -Q\frac{R}{z_0}$, έξω από τη σφαίρα και στη θέση $z_0' = R^2/z_0$.

(i) Το δυναμικό εντός του φλοιού, $(r<R)$, είναι

$$\phi(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+z_0^2-2rz_0\cos\theta}} - \frac{R}{\sqrt{z_0^2r^2+R^4-2rR^2z_0\cos\theta}}\right\}.$$

(όταν $z=0$, τότε $\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$.

(ii) Η επαγώμενη πυκνότητα φορτίου στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού είναι

$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0(\vec{\nabla}\phi\cdot\hat{n})_{r=R}$, όπου $\hat{n} = -\hat{r}$. Άρα

$$\sigma(\theta) = \varepsilon_0\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{Q(z_0^2-R^2)}{4\pi R(R^2+z_0^2-2z_0R\cos\theta)^{3/2}}.$$

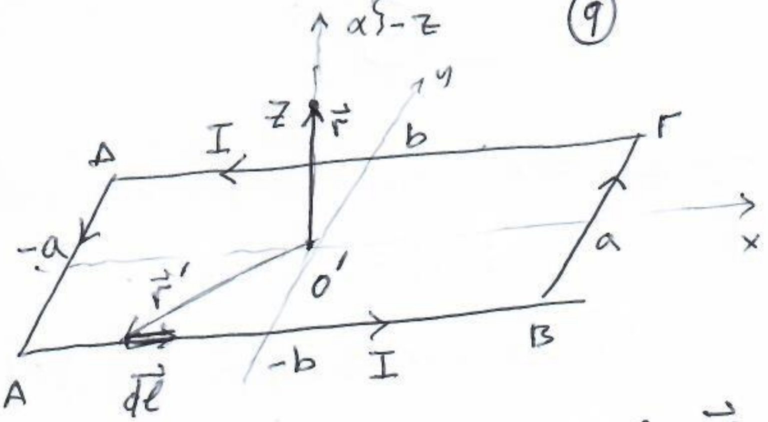
(iii) $$\int dS\,\sigma(\theta) = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\, R^2\sin\theta\,\sigma(\theta) =$$

$$= 2\pi R^2\int_0^{\pi}\frac{Q(z_0^2-R^2)\sin\theta}{4\pi R(R^2+z_0^2-2z_0R\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$= (2\pi R^2)\frac{Q(z_0^2-R^2)}{4\pi R}\int_0^{\pi}d\theta\,\frac{1}{z_0R}\left(-\frac{1}{(R^2+z_0^2-2z_0R\cos\theta)^{1/2}}\right)'_\theta =$$

$$= \frac{(2\pi R^2)Q(z_0^2-R^2)}{4\pi R}\frac{1}{(z_0R)}\left(-\frac{1}{R+z_0}+\frac{1}{R-z_0}\right) = -Q$$

A 7



(Biot-Savart) $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$.

π.χ για την πλευρά (AB) έχουμε

$\vec{r} = z\hat{k}$, $\vec{r}\,' = x'\hat{i} - b\hat{j}$, $d\vec{\ell} = dx\,\hat{i}$.

$$d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}\,') = dx\,\hat{i} \times \left[z\hat{k} - x'\hat{i} + b\hat{j} \right] =$$

$$= dx\left(-z\hat{j} + b\hat{k}\right),$$ οπότε.

$$\int_{(AB)} (\ldots) = \int_{-a}^{a} dx' \frac{-z\hat{j} + b\hat{k}}{(x'^2 + b^2 + z^2)^{3/2}} = \left[-\frac{2az}{(b^2+z^2)\sqrt{a^2+b^2+z^2}} \right]\hat{j}$$

$$+ \left[\frac{2ab}{(b^2+z^2)\sqrt{a^2+b^2+z^2}} \right]\hat{k}$$. (βλέπε πρόβλ. 2)

Ομοίως

$$\int_{(B\Gamma)} (\ldots) = \int_{-b}^{b} dy' \frac{z\hat{i} + a\hat{k}}{(a^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} =$$

$$= \left[\frac{2bz}{(a^2+z^2)\sqrt{a^2+b^2+z^2}} \right]\hat{i} + \left[\frac{2ab}{(a^2+z^2)\sqrt{a^2+b^2+z^2}} \right]\hat{k} .$$

Η συνεισφορά των πλευρών (ΓΔ) και (ΔΑ) εξαλείφει τις y και x συνιστώσες αντίστοιχα (π.χ $d\vec{\ell}_{\Gamma\Delta} = -dx\,\hat{i}$)

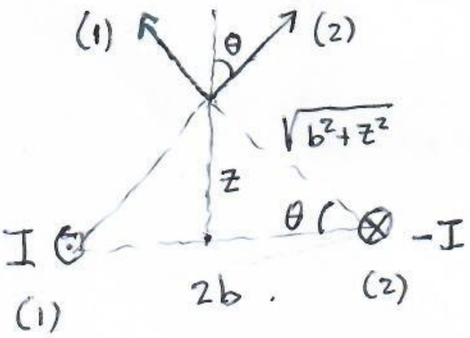
Τελικώς πάνω στόν άξονα-z έχουμε:

$$\vec{B} = B_z(z)\,\hat{k}\,, \quad \text{όπου}$$

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{4ab}{(b^2+z^2)\sqrt{a^2+b^2+z^2}} + \frac{4ab}{(a^2+z^2)\sqrt{a^2+b^2+z^2}}\right]$$

(Για $|z| \gg a, b$ $\quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{m}}{z^3}$, $\vec{m} = (4abI)\hat{k}$).

(ii) Όταν $a \to \infty$, το δεύτερο κλάσμα στην αγκύλη τείνει στό μηδέν. Η διάταξη ισοδυναμεί με 2 παράλληλους ευθύγραμμους αγωγούς σε απόσταση $2b$, που διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα. Το μαγνητικό πεδίο πάνω σε ευθεία κάθετη στό επίπεδο των αγωγών, που ισαπέχει από αυτούς έχει μέτρο $\boxed{B_z = \frac{(\mu_0 I)}{4\pi}\frac{4b}{b^2+z^2}}$



$$\left(B_z^{(2)} = B_z^{(1)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\frac{b}{\sqrt{b^2+z^2}}\right)$$

A 8 $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} ,$$

όπου $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ και $\vec{r}\,'$ πάνω στό βρόχο.

Γιά τήν πλευρά AB (βλ. ασκηση 7).

$\vec{r}\,'_{AB} = x'\hat{i} - b\hat{j}$, $d\vec{\ell}_{AB} = dx'\hat{i}$

$$\int_{(AB)}(\dots) = \int_{-a}^{a}\frac{dx'\hat{i}}{\left[(x-x')^2+(y+b)^2+z^2\right]^{1/2}} =$$

$$= \ln\left[\frac{(x+a)+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}{(x-a)+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]\hat{i}$$ (Με χρηση της υπόδειξης)

Ομοίως

$$\int_{(B\Gamma)}(\dots) = \ln\left[\frac{(y+b)+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}{(y-b)+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right]\hat{j}$$

Προσθέτοντας τη συνεισφορά των πλευρών ΓΔ και ΔΑ οπου $d\vec{\ell} = -dx\,\hat{i}$ και $d\vec{\ell} = -dy\,\hat{j}$ αντίστοιχα εχουμε τήν τελική έκφραση γιά τό διανυσματικό δυναμικό σε τυχαίο σημείο (x,y,z) στό χώρο. Παρατηρούμε οτι τό δυναμικό $\vec{A}$ έχει μονο x και y - συνιστώσες

(Ερώτηση: πόσο ειναι το δυναμικό πανω στον άξονα - z)