ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

19. Αναπαραστάσεις της SU(2)

Έχοντας επιλέξει $\mathbf{X}_k = \frac{\sigma_k}{2}$ $(k = 1, \ ,2, \ 3)$ η άλγεβρα Lie της SU(2) γράφεται:

$$\left[\mathbf{X}_j, \ \mathbf{X}_k\right] = i\epsilon_{jk\ell}\mathbf{X}_\ell$$

Οπότε ένα **στοιχείο** της SU(2) γράφεται σαν **στροφή**:

$$\mathbf{U}(\phi, \vec{n}) = e^{i\phi\vec{n}\cdot\vec{\mathbf{X}}}$$

Μια **αναπαράσταση της SU(2)** $\Pi[U(\phi,\vec{n})]$ θα καθορίζεται από την **αναπαράσταση** $\pi[X_k]$ **των γεννητόρων** της.

$$\Downarrow$$

Εύρεση αναπαραστάσεων της SU(2) $\Leftrightarrow$ εύρεση αναπαραστάσεων της $\mathrm{su}(2)$

Επειδή $\det(\mathbf{U}(\phi,\vec{n})) = 1$ θα πρέπει και $\det(\Pi[\mathbf{U}(\phi,\vec{n})]) = 1.$

Αν πάρουμε το $\vec{n}$ στην διεύθυνση k ($n_k = \mathbf{e}_k$, $k = 1, 2, 3$) τότε:

$$\mathbf{U}(\phi, \vec{n}) = \mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_k) = e^{i\phi \mathbf{X}_k} \qquad \text{και επομένως:}$$

$$\boldsymbol{\Pi}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_k)] = e^{i\phi\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k]} \Rightarrow \det(e^{i\phi\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k]}) = 1 \Rightarrow \det(\mathbf{S}e^{i\phi\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k]}\mathbf{S}^{-1}) = 1$$

όπου ο πίνακας **S διαγωνοποιεί** τον $\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k]$ (και τον $e^{i\phi\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k]}$). Μετά τον **S**-μετασχηματισμό ομοιότητας παίρνουμε:

$$\mathbf{S}e^{i\phi\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k]}\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_k^{(1)}\phi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_k^{(2)}\phi} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\lambda_k^{(d\pi)}\phi} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\det(\mathbf{S}e^{i\phi\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k]}\mathbf{S}^{-1}) = e^{i\phi\sum_{j=1}^{d_\pi}\lambda_k^{(j)}} = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{d_\pi}\lambda_k^{(j)} = \overbrace{\mathrm{Tr}(\mathbf{S}\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k]\mathbf{S}^{-1})}^{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k])} = 0$$

Οι πίνακες $\pi[\mathrm{X}_k]$ **αναπαράστασεων** της $\mathrm{su}(2)$ έχουν **ίχνος μηδέν**.

Η $\mathrm{su}(2)$ Lie-άλγεβρα χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιότητες:

- Ένας εκ των τριών γεννητόρων $\mathbf{X}_k$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ μπορεί να επιλεγεί σε **διαγώνια μορφή**. Στη θεμελιώδη αναπαράσταση της $\mathrm{su}(2)$ αυτός είναι ο $\mathbf{X}_3 \ = \ \frac{\sigma_3}{2}$:

$$\mathbf{X}_3 \ = \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Ο γεννήτορας αυτός αποτελεί την **υποάλγεβρα Cartan της $\mathrm{su}(2)$**. Αντίστοιχα και οι **αναπαραστάσεις του $\pi[\mathrm{X}_3]$** θα έχουν **διαγώνια μορφή**.

- Υπάρχει ένας πίνακας που εκφράζεται μέσω των γεννητόρων $\mathbf{X}_k$ και **μετατίθεται με όλους τους X_k**. Αυτός λέγεται **τελεστής Cassimir** και δίνεται ως:

$$\mathbf{C_1} \ = \ \sum_{j=1}^{3}\mathbf{X}_j^2 \quad \text{με} \quad [\mathbf{C_1},\ \mathbf{X}_k] \ = \ 0 \qquad (\text{απόδειξη σαν άσκηση})$$

  Από το λήμμα του Schur θα ισχύει ότι $\mathbf{C_1} \propto \mathbf{I}$. Καταλαβαίνετε γιατί;

- Ο πίνακας $\boldsymbol{\pi}[\mathbf{C_1}]$ θα είναι ανάλογος του $d_\pi \times d_\pi$ μοναδιαίου $\mathbf{I}$.

- Οι πίνακες $\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k]$ θα ικανοποιούν την άλγεβρα Lie:

$$\Big[\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_j],\ \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k]\Big] \ = \ i\epsilon_{jk\ell}\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_\ell]$$

- Οι πίνακες $\mathbf{X}_k$ και $\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_k]$ έχουν πραγματικές ιδιοτιμές (ερμιτιανοί λόγω μοναδιακότητας των $\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_k)$, $\boldsymbol{\Pi}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_k)]$).

- Μπορούμε να ορίσουμε ανύσματα $|c, \lambda\rangle$ που είναι κοινές ιδιοκαταστάσεις των πινάκων $\boldsymbol{\pi}[\mathbf{C_1}]$ και $\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3]$:

$$\boldsymbol{\pi}[\mathbf{C_1}]|c, \lambda\rangle \ = \ c\ |c, \lambda\rangle \quad , \quad \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3]|c, \lambda\rangle \ = \ \lambda|c, \lambda\rangle \qquad \text{με} \ \ c,\ \lambda \ \in \ \mathbb{R}$$

- Ορίζουμε τους πίνακες: $\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_\pm] \ = \ \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_1] \pm i\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_2]$ με κανόνες μετάθεσης (νέα **μιγαδοποιημένη** άλγεβρα Lie):

$$[\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3],\ \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_\pm]] \ = \ \pm\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_\pm], \quad [\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_+],\ \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_-]] \ = \ 2\ \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3]$$

- Ισχύει:

$$\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_+]|c,\lambda\rangle \;\;\propto\;\; |c,\lambda+1\rangle$$

  Τα διαφορετικά ανύσματα $\{|c,\lambda\rangle\}$ μας καθορίζουν την διάσταση του διανυσματικού χώρου της αναπαράστασης.

- Ενδιαφερόμαστε για ΜΑ, ΜΙ αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης, οπότε:

$$\exists\ \lambda_{max} \;\;:\;\; \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_+]|c,\lambda_{max}\rangle \;\;=\;\; 0$$

- Ο $\boldsymbol{\pi}[\mathbf{C_1}]$ μπορεί να γραφεί σε οποιαδήποτε αναπαράσταση της μιγαδοποιημένης άλγεβρας Lie ως:

$$\boldsymbol{\pi}[\mathbf{C_1}] \;=\; \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_-]\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_+]+\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3]+\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3]^2 \;=\; \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_+]\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_-]-\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3]+\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3]^2$$

  οπότε:

$$\boldsymbol{\pi}[\mathbf{C_1}]|c,\lambda_{max}\rangle \;\;=\;\; (\lambda_{max}+\lambda_{max}^2)|c,\lambda_{max}\rangle \quad\Rightarrow\quad c \;\;=\;\; \lambda_{max}(\lambda_{max}+1)$$

- Επίσης ισχύει:

$$\pi[\mathbf{X}_-]|c,\lambda\rangle \;\propto\; |c,\lambda-1\rangle$$

- Ξεκινώντας από το $|c,\lambda_{max}\rangle$ δρούμε ℓ φορές με τον $\pi[\mathbf{X}_-]$ έτσι ώστε:

$$\pi[\mathbf{X}_-]\left(\pi[\mathbf{X}_-]^{\ell}|c,\lambda_{max}\rangle\right) \;=\; 0$$

- Για την κατάσταση $\pi[\mathbf{X}_-]^{\ell}|c,\lambda_{max}\rangle$ θα ισχύει:

$$\pi[\mathbf{C_1}]\left(\pi[\mathbf{X}_-]^{\ell}|c,\lambda_{max}\rangle\right) \;=\; \lambda_{max}(\lambda_{max}+1)\;\pi[\mathbf{X}_-]^{\ell}|c,\lambda_{max}\rangle \qquad \text{και}$$

$$\pi[\mathbf{C_1}]\left(\pi[\mathbf{X}_-]^{\ell}|c,\lambda_{max}\rangle\right) \;=\; \left[-(\lambda_{max}-\ell)+(\lambda_{max}-\ell)^2\right]\pi[\mathbf{X}_-]^{\ell}|c,\lambda_{max}\rangle$$

οπότε:

$$\ell \;=\; 2\,\lambda_{max} \quad\Rightarrow\quad -\lambda_{max} \;\leq\; \lambda \leq\; \lambda_{max} \quad \text{με} \quad 2\,\lambda_{max} \;\in\; \mathbb{N}_0$$

Οι **ιδιοτιμές** του $\pi[\mathrm{C}_1]$ καθορίζουν **την διάσταση** $d_\pi \;=\; \ell+1$ της αναπαράστασης $\mathbf{\Pi}[\mathbf{U}(\phi,\mathbf{e}_k)]$.

Βασισμένοι στα προηγούμενα μπορούμε να προσδιορίσουμε τους πίνακες $\boldsymbol{\pi}[\mathbf{C_1}]$ και $\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3]$ για διάφορες αναπαραστάσεις της $\mathrm{su}(2)$:

- $\ell = 1 \Rightarrow d_\pi = 2$ και $\lambda_{max} = \frac{1}{2}$ οπότε $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$:

$$\boldsymbol{\pi}[\mathbf{C_1}] = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- $\ell = 2 \Rightarrow d_\pi = 3$ και $\lambda_{max} = 1$ οπότε $-1 \leq \lambda \leq 1$:

$$\boldsymbol{\pi}[\mathbf{C_1}] = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $\ell = 3 \Rightarrow d_\pi = 4$ και $\lambda_{max} = \frac{3}{2}$ οπότε $-\frac{3}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{2}$:

$$\boldsymbol{\pi}[\mathbf{C_1}] = \frac{15}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3] = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Χρειαζόμαστε όμως και τις αναπαραστάσεις των άλλων γεννητόρων. Ισχύει: $\pi[\mathbf{X}_-] = \pi[\mathbf{X}_+]^\dagger$ και $\langle\lambda, c|\pi[\mathbf{C_1}]|c,\lambda\rangle = \lambda_{max}(\lambda_{max}+1)$.

Επίσης: $\langle c,\lambda|\pi[\mathbf{C_1}]|c,\lambda\rangle = \langle c,\lambda|\left(\pi[\mathbf{X}_-]\pi[\mathbf{X}_+] + \pi[\mathbf{X}_3] + \pi[\mathbf{X}_3]^2\right)|c,\lambda\rangle$.

Με $\pi[\mathbf{X}_+]|c,\lambda\rangle = \Lambda_+(\lambda_{max},\lambda)|c,\lambda+1\rangle$ και $\Lambda_+(\lambda_{max},\lambda) \in \mathbb{C}$ παίρνουμε:

$$|\Lambda_+(\lambda_{max},\lambda)|^2 + \lambda + \lambda^2 = \lambda_{max}(\lambda_{max}+1)$$

$$\Downarrow$$

$$\Lambda_+(\lambda_{max},\lambda) = \sqrt{\lambda_{max}(\lambda_{max}+1) - \lambda(\lambda+1)}\ e^{i\theta}$$

και παρομοίως με: $\pi[\mathbf{X}_-]|c,\lambda\rangle = \Lambda_-(\lambda_{max},\lambda)|c,\lambda-1\rangle$ παίρνουμε:

$$\Lambda_-(\lambda_{max},\lambda) = \sqrt{\lambda_{max}(\lambda_{max}+1) - \lambda(\lambda-1)}\ e^{i\chi}$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας επιλέγουμε $\theta = \chi = 0$ οπότε:

$$\boxed{\boldsymbol{\Lambda_\pm(\lambda_{max},\lambda) = \sqrt{\lambda_{max}(\lambda_{max}+1) - \lambda(\lambda\pm1)}}}$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$\langle c,\lambda_1|\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_\pm]|c,\lambda_2\rangle \;=\; \sqrt{\lambda_{max}(\lambda_{max}+1)-\lambda(\lambda\pm1)}\;\delta_{\lambda_1,\lambda_2\pm1}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_1] \;=\; \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_+]+\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_-]\right) \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_2] \;=\; \frac{1}{2i}\left(\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_+]-\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_-]\right)$$

κατασκευάζουμε και τις αναπαραστάσεις των υπολοίπων γεννητόρων της $\mathrm{su}(2)$.

Έτσι για παράδειγμα στην περίπτωση $\lambda_{max} \;=\; 1$ παίρνουμε:

$$\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_1] \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_2] \;=\; \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Για $d_\pi = 3$ υπάρχει και η **συζυγής** αναπαράσταση (ΜΑ) της $\mathrm{su}(2)$:

$$(\mathbf{X}_k)_{\ell,m} \;=\; i\;\epsilon_{k\ell m}$$

Αποδείξτε ότι η επιλογή αυτή για τα $\mathbf{X}_k$ οδηγεί σε αναπαράσταση.

Είναι εύκολο να προσδιορίσει κανείς τις ΜΑ, ΜΙ αναπαραστάσεις των στοιχείων $\mathbf{U}(\phi, \vec{e}_3)$ της SU(2). Για την λ_{max} αναπαράσταση της $\mathrm{su}(2)$ θα ισχύει:

$$\mathbf{\Pi}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_3)] \ = \ e^{i\phi\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3]} \ = \ \begin{pmatrix} e^{i\lambda_{max}\phi} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\lambda_{max}-1)\phi} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-i(\lambda_{max}-1)\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{-i\lambda_{max}\phi} \end{pmatrix}$$

Με ίχνος:

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_3)]) \ = \ \frac{\sin((\lambda_{max} + \frac{1}{2})\phi)}{\sin(\frac{\phi}{2})}$$

Οπότε βρίσκουμε για παράδειγμα:

- $\lambda_{max} = 0 \Rightarrow \chi(e^{i\phi\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3]}) \ = \ 1$ (τετριμμένη).
- $\lambda_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \chi(e^{i\phi\boldsymbol{\pi}[\mathbf{X}_3]}) \ = \ 2\cos(\frac{\phi}{2})$ κ.λ.π.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους **χαρακτήρες των ΜΑ αναπαραστάσεων** $\Pi[\mathrm{U}(\phi, \mathrm{e}_3)]$ για να **αποσυνθέσουμε αναγώγιμες αναπαραστάσεις!**

Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό: $\mathbf{\Pi}^{(r)}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_3)]$ για την ΜΑ αναπαράσταση της SU(2) με $r = \lambda_{max}$. Προφανώς θα ισχύει:

$$\mathbf{\Pi}^{(r_1)}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_3)] \bigotimes \mathbf{\Pi}^{(r_2)}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_3)] \;=\; \bigoplus_{r_3} \mu_{r_3} \mathbf{\Pi}^{(r_3)}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_3)]$$

και επιπλέον: $\chi(\mathbf{\Pi}^{(r_1)}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_3)] \otimes \mathbf{\Pi}^{(r_2)}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_3)]) \;=\; \chi^{(r_1)}(\phi)\chi^{(r_2)}(\phi)$

Ο προσδιορισμός των μ_{r_3} μπορεί να γίνει μέσω του ίχνους. Για παράδειγμα, για $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ θα έχουμε:

$$\chi(\mathbf{\Pi}^{(1/2)}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_3)] \bigotimes \mathbf{\Pi}^{(1/2)}[\mathbf{U}(\phi, \mathbf{e}_3)]) \;=\; 4\cos^2(\frac{\phi}{2}) \;=\; \underbrace{2\cos\phi + 1}_{\chi^{(1)}(\phi)} + \underbrace{1}_{\chi^{(0)}(\phi)}$$

οπότε: $\mathbf{\Pi}^{(1/2)}[\mathbf{U}(\phi, \vec{n})] \otimes \mathbf{\Pi}^{(1/2)}[\mathbf{U}(\phi, \vec{n})] \;=\; \mathbf{\Pi}^{(0)}[\mathbf{U}(\phi, \vec{n})] \bigoplus \mathbf{\Pi}^{(1)}[\mathbf{U}(\phi, \vec{n})]$