ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαικό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

11. Αναπαραστάσεις ομάδων

- Έστω $\mathbb{V}$ διανυσματικός χώρος και $\vec{x} \in \mathbb{V}$.
- Έστω $S = \{\hat{s}_1, \ \hat{s}_2, ..., \ \hat{s}_N\}$ **σύνολο τελεστών** από το $\mathbb{V}$ στο $\mathbb{V}$ **που αποτελούν ομάδα** $(\hat{s}_i\hat{s}_j \in S, \ \ \forall \hat{s}_i, \ \hat{s}_j \ \in \ S)$.
- Ορίζουμε απεικόνιση $f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (f(\vec{x}) \in \mathbb{C})$.
- Ορίζουμε τελεστές $\hat{U}_{s_i}$ από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει:

$$\hat{U}_{s_i} f(\vec{x}) = f(\hat{s}_i^{-1}\vec{x}) \quad ; \quad \forall \ \hat{s}_i \ \in \ S$$

- Τότε και το σύνολο τελεστών $U_S = \{\hat{U}_{s_1}, \ \hat{U}_{s_2}, ..., \ \hat{U}_{s_N}\}$ αποτελεί ομάδα.
  - Πράγματι: $\hat{U}_{s_j}\hat{U}_{s_i} f(\vec{x}) = f((\hat{s}_j\hat{s}_i)^{-1}\vec{x}) = \hat{U}_{s_j s_i} f(\vec{x})$ (κλειστότητα)
  - Αν $\hat{s}_e\vec{x} = \vec{x}$ τότε $\hat{U}_{s_e}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο.
  - Αν $\hat{s}_i\hat{s}_i^{-1} = \hat{s}_e$ τότε $\hat{U}_{s_i^{-1}}$ είναι το αντίστροφο του $\hat{U}_{s_i}$.

Παραδείγματα

1. Έστω ο μετασχηματισμός $\hat{s}_{\vec{a}}$ **χωρικής μεταφοράς κατά** $\vec{a}$: $\hat{s}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$. Τότε:

$$\hat{U}_{s_{\vec{a}}} = e^{-\vec{a}\cdot\vec{\nabla}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^n}{n!}$$

αφού:

$$\hat{U}_{\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^n}{n!} f(\vec{x})$$

Η S είναι **άπειρο αλλά αριθμήσιμο σύνολο** τελεστών $\hat{s}_{m\vec{a}}$ με $m \in \mathbb{Z}$. Στο $\hat{s}_{m\vec{a}}$ αντιστοιχεί το $\hat{U}_{s_{m\vec{a}}} = e^{-m\vec{a}\cdot\vec{\nabla}}$.

2. Άλλος συνήθης μετασχηματισμός είναι ο **καθρεπτισμός ως προς την αρχή των αξόνων** που σχηματίζει ομάδα με δύο στοιχεία: $S = \{\hat{s}_e,\ \hat{s}_2\}$ με $\hat{s}_e\vec{x} = \vec{x}$ και $\hat{s}_2\vec{x} = \hat{s}_2^{-1} = -\vec{x}$. Ισχύει:

$$\hat{U}_{s_e} f(\vec{x}) = f(\vec{x}) \;\Rightarrow\; \hat{U}_{s_e} = \hat{I} \quad ; \quad \hat{U}_{s_2} f(\vec{x}) = f(-\vec{x}) \;\Rightarrow\; \hat{U}_{s_2} = \hat{\Pi}^{-1} = \hat{\Pi}$$

Προφανώς $\hat{\Pi}^2 = \hat{I}$ οπότε: $\{\hat{s}_e,\ \hat{s}_2\} \cong C_2 \qquad ; \qquad \{\hat{I},\ \hat{\Pi}\} \cong C_2$

Στη **κβαντική περιγραφή** της Φύσης οι απεικονίσεις $f(\vec{x})$ αποτελούν **διανυσματικό χώρο** $\mathcal{H}$ (χώρος Hilbert).

Ορίζουμε τελεστές $\widehat{A}_{\vec{x}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ με $\widehat{A}_{\vec{x}} f(\vec{x}) = g(\vec{x})$

Ερώτημα: Αν $\vec{x} \to \widehat{s}^{-1}\vec{x}$ πώς μετασχηματίζεται ο $\widehat{A}_{\vec{x}}$;

$$\widehat{U}_s \widehat{A}_{\vec{x}} f(\vec{x}) = \widehat{U}_s g(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \widehat{U}_s \widehat{A}_{\vec{x}} \widehat{U}_s^{-1} \widehat{U}_s f(\vec{x}) = g(\widehat{s}^{-1}\vec{x})$$

$$\Downarrow$$

$$\widehat{U}_s \widehat{A}_{\vec{x}} \widehat{U}_s^{-1} f(\widehat{s}^{-1}\vec{x}) = g(\widehat{s}^{-1}\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \widehat{U}_s \widehat{A}_{\vec{x}} \widehat{U}_s^{-1} = \widehat{A}_{\widehat{s}^{-1}\vec{x}}$$

Αναλλοιότητα του $\widehat{A}_{\vec{x}}$ στον $\vec{x} \to \widehat{s}^{-1}\vec{x}$ απαιτεί:

$$\widehat{A}_{\widehat{s}^{-1}\vec{x}} = \widehat{A}_{\vec{x}} \quad \Rightarrow \quad \widehat{U}_s \widehat{A}_{\vec{x}} \widehat{U}_s^{-1} = \widehat{A}_{\vec{x}}$$

$$\swarrow$$

$$\widehat{U}_s \widehat{A}_{\vec{x}} = \widehat{A}_{\vec{x}} \widehat{U}_s \quad \Rightarrow \quad [\widehat{A}_{\vec{x}},\ \widehat{U}_s] = 0$$

Ένα ακόμη ενδιαφέρον ερώτημα από πλευράς Φυσικής είναι **τι επιφέρει ο μετασχηματισμός $\widehat{s}$ στις ιδιοκαταστάσεις του $\widehat{A}_{\vec{x}}$** αν αυτός είναι **αναλλοίωτος στον $\widehat{U}_s$**.

Έστω $\phi(\vec{x}, \lambda)$ ιδιοκατάσταση του $\widehat{A}_{\vec{x}}$ με ιδιοτιμή λ:

$$\widehat{A}_{\vec{x}}\phi(\vec{x}, \lambda) = \lambda\phi(\vec{x}, \lambda) \qquad ; \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Δρώντας με τον τελεστή $\widehat{U}_s$ στην ανωτέρω σχέση παίρνουμε:

$$\widehat{U}_s\widehat{A}_{\vec{x}}\phi(\vec{x}, \lambda) = \widehat{U}_s\lambda\phi(\vec{x}, \lambda) \Rightarrow \widehat{A}_{\vec{x}}\widehat{U}_s\phi(\vec{x}, \lambda) = \lambda\widehat{U}_s\phi(\vec{x}, \lambda)$$

Η ιδιοκατάσταση $\phi(\vec{x}, \lambda)$ μετασχηματίζεται στην $\widehat{U}_s\phi(\vec{x}, \lambda)$

- Αν το φάσμα του $\widehat{A}_{\vec{x}}$ **δεν είναι εκφυλλισμένο** τότε:

$$\widehat{U}_s\phi(\vec{x}, \lambda) \sim \phi(\vec{x}, \lambda)$$

(ένα προς ένα αντιστοιχία)

- Αν το φάσμα του $\hat{A}_{\vec{x}}$ **έχει εκφυλλισμό** τότε:

$$\phi(\vec{x},\lambda) \longrightarrow \begin{cases} \phi_1(\vec{x},\lambda) \\ \phi_2(\vec{x},\lambda) \\ . \\ . \\ . \\ \phi_{M-1}(\vec{x},\lambda) \\ \phi_M(\vec{x},\lambda) \end{cases}$$

Οπότε:

$$\hat{U}_s \phi_i(\vec{x},\lambda) = \sum_{j=1}^{M} [\mathcal{D}(\hat{U}_s)]_j^{(i)} \phi_j(\vec{x},\lambda)$$

Οι συντελεστές $[\mathcal{D}(\hat{U}_s)]_j^{(i)}$ παραπέμπουν σε δομή πίνακα. Για να το διαπιστώσουμε αυτό θα δούμε την αλλεπάληλη δράση δύο μετασχηματισμών στο $\phi_i(\vec{x},\lambda)$

Δηλαδή:

$$\hat{U}_{s_2}\hat{U}_{s_1}\phi_i(\vec{x},\lambda) = \hat{U}_{s_2}\sum_{j=1}^{M}[\mathcal{D}(\hat{U}_{s_1})]_j^{(i)}\phi_j(\vec{x},\lambda)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\hat{U}_{s_2}\hat{U}_{s_1}}_{\hat{U}_{s_2 s_1}}\phi_i(\vec{x},\lambda) = \sum_{j=1}^{M}[\mathcal{D}(\hat{U}_{s_1})]_j^{(i)}\underbrace{\hat{U}_{s_2}\phi_j(\vec{x},\lambda)}_{\sum_{k=1}^{M}[\mathcal{D}(\hat{U}_{s_2})]_k^{(j)}\phi_k(\vec{x},\lambda)}$$

Θέτοντας $\hat{U}_{s_2 s_1}\phi_i(\vec{x},\lambda) = \sum_{k=1}^{M}[\mathcal{D}(\hat{U}_{s_2 s_1})]_k^{(i)}\phi_k(\vec{x},\lambda)$ παίρνουμε:

$$\sum_{k=1}^{M}\left\{[\mathcal{D}(\hat{U}_{s_2 s_1})]_k^{(i)} - \sum_{j=1}^{M}[\mathcal{D}(\hat{U}_{s_1})]_j^{(i)}[\mathcal{D}(\hat{U}_{s_2})]_k^{(j)}\right\}\phi_k(\vec{x},\lambda) = 0$$

Από την σχέση:

$$\sum_{k=1}^{M}\left\{[\mathcal{D}(\widehat{U}_{s_2 s_1})]_k^{(i)} - \sum_{j=1}^{M}[\mathcal{D}(\widehat{U}_{s_1})]_j^{(i)}[\mathcal{D}(\widehat{U}_{s_2})]_k^{(j)}\right\}\phi_k(\vec{x},\lambda) = 0$$

επειδή τα $\phi_k(\vec{x},\lambda) = 0$ **είναι γραμμικά ανεξάρτητα** προκύπτει:

$$[\mathcal{D}(\widehat{U}_{s_2 s_1})]_k^{(i)} - \sum_{j=1}^{M}[\mathcal{D}(\widehat{U}_{s_1})]_j^{(i)}[\mathcal{D}(\widehat{U}_{s_2})]_k^{(j)} = 0$$

Αν θέσουμε $[\mathcal{D}(\widehat{U}_s)]_k^{(i)} \equiv [\mathcal{D}(\widehat{U}_s)]_{k,i}$ τότε η ανωτέρω σχέση γράφεται:

$$[\mathcal{D}(\widehat{U}_{s_2 s_1})]_{k,i} = \sum_{j=1}^{M}[\mathcal{D}(\widehat{U}_{s_2})]_{k,j}[\mathcal{D}(\widehat{U}_{s_1})]_{j,i}$$

$$\Downarrow$$

Οι **συντελεστές** $[\mathcal{D}(\widehat{U}_s)]_{j,i}$ σχηματίζουν **πίνακες** που **ικανοποιούν** τις ιδιότητες **γινομένου** της **ομάδας των** $\{\widehat{U}_s\}$

Υπάρχει **απεικόνιση (ομοιομορφισμός)** των στοιχείων της ομάδας των $\{\hat{U}_s\}$ σε **πίνακες** $\mathcal{D}(\hat{U}_s)$

$$\Downarrow$$

Αναπαράσταση της $\{\hat{U}_s\}$

- Αν η απεικόνιση είναι **ισομορφισμός** $(1 \to 1)$ τότε η αναπαράσταση καλείται **πιστή**.

- Αν $\{\mathbf{P_a}\}$ με $a = 1,\ 2, ...,\ |G|$ είναι αναπαράσταση της G με πίνακες διάστασης $d \times d$ τότε και οι $\{\mathbf{BP_aB^{-1}}\}$ (μετασχηματισμός ομοιότητας, όπου $\mathbf{B}$ πίνακας $d \times d$) είναι αναπαράσταση της G.

- Η αναπαράσταση δεν είναι υποχρεωτικά ομάδα. Η πιστή αναπαράσταση είναι ομάδα.

- Έστω $\{\mathbf{A_a}\}$ με $a = 1,\ 2, ...,\ |G|$ αναπαράσταση ομάδας G με πίνακες $n \times n$.

- Επίσης έστω $\{\mathbf{B_a}\}$ με $a = 1,\ 2, ...,\ |G|$ αναπαράσταση της G με πίνακες $m \times m$.

- Οι πίνακες $\mathbf{C_a} = \mathbf{A_a} \oplus \mathbf{B_a}$ διάστασης $(n+m) \times (n+m)$ αποτελούν επίσης αναπαράσταση της G.

- Οι $\mathbf{C_a}$ έχουν block-διαγώνια μορφή:

$$\mathbf{C_a} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B_a} \end{pmatrix}$$

  και η αντίστοιχη αναπαράσταση λέγεται **αναγώγιμη**.

- Στη Φυσική θεμελιώδες ενδιαφέρον έχουν οι αναπαραστάσεις για τις οποίες **δεν υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας που τις φέρνει σε block-διαγώνια μορφή**

$$\Downarrow$$

Μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό αν $\{\mathrm{A_a}\}$ **(μη) αναγώγιμη αναπαράσταση ομάδας** G με $d \times d$ πίνακες $(a = 1,\ 2, ..., |G|)$ τότε και **κάθε μετασχηματισμός ομοιότητας** $\mathrm{BA_aB^{-1}}$ $(\forall\ a)$ θα είναι **(μη) αναγώγιμη αναπαράσταση της** G.

$$\Downarrow$$

Θεώρημα: **Κάθε ομάδα G έχει μοναδιακή αναπαράσταση.**

- Έστω $\{A_1,\ A_2, ...,\ A_{|G|}\}$ αναπαράσταση της G με $d \times d$ πίνακες.

- Ορίζουμε τον πίνακα $\mathbf{H} = \sum_{a=1}^{|G|} \mathbf{A_a A_a^\dagger}$

- Ο $\mathbf{H}$ είναι ερμιτιανός $\Rightarrow$ διαγωνοποιείται από μοναδιακό πίνακα $\mathbf{U_H}$: $\mathbf{H_D} \ = \ \mathbf{U_H} \sum_{a=1}^{|G|} \mathbf{A_a A_a^\dagger} \underbrace{\mathbf{U_H^{-1}}}_{\mathbf{U_H^\dagger}}.$

- Ορίζουμε $\mathbf{\tilde{A}_a} = \mathbf{U_H A_a U_H^\dagger} \Rightarrow \mathbf{H_D} = \sum_{a=1}^{|G|} \mathbf{\tilde{A}_a \tilde{A}_a^\dagger}$. Τα $\mathbf{\tilde{A}_a}$ αποτελούν προφανώς αναπαράσταση του G.

- Ισχύει ότι: $\mathbf{H_D}_{i,i} = \sum_{a=1}^{|G|} \sum_{j=1}^{d} (\mathbf{\tilde{A}_a})_{i,j} (\mathbf{\tilde{A}_a^\dagger})_{j,i} = \sum_{a=1}^{|G|} \sum_{j=1}^{d} |(\mathbf{\tilde{A}_a})_{i,i}|^2 > 0$

- Άρα $\mathbf{H_D}_{i,j} = D_{i,i}\delta_{i,j}$ με $D_{i,i} > 0$.

- Ορίζουμε τους πίνακες: $\mathbf{D^{1/2}}_{i,j} = \sqrt{D_{i,i}}\delta_{i,j}$ και $\mathbf{D^{-1/2}}_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{D_{i,i}}}\delta_{i,j}$ με την ιδιότητα $\mathbf{D^{1/2}D^{-1/2}} = \mathbf{I}$ και $\mathbf{D^{1/2}D^{1/2}} = \mathbf{D} = \mathbf{H_D}$.

- Επίσης ορίζουμε τους πίνακες $\mathbf{B_a} = \mathbf{D^{-1/2}\tilde{A}_a D^{1/2}}$ που αποτελούν αναπαράσταση του G. Οι $\mathbf{B_a}$ είναι μοναδιακοί.

- Ισχύει: $\mathbf{B_a B_a^\dagger} = \mathbf{D^{-1/2}\tilde{A}_a} \underbrace{\mathbf{D}}_{\sum_{b=1}^{|G|} \mathbf{\tilde{A}_b \tilde{A}_b^\dagger}} \mathbf{\tilde{A}_a^\dagger D^{-1/2}} = \mathbf{D^{-1/2} D D^{-1/2}} = \mathbf{I}$

  αφού $\mathbf{\tilde{A}_a}(\sum_{b=1}^{|G|} \mathbf{\tilde{A}_b \tilde{A}_b^\dagger})\mathbf{\tilde{A}_a^\dagger} = \sum_{b=1}^{|G|} (\mathbf{\tilde{A}_a \tilde{A}_b})(\mathbf{\tilde{A}_a \tilde{A}_b})^\dagger = \mathbf{D}$